

XX Міжнародна науково-практична конференція

**"СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ
НАУКАХ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЯХ"**

Тези доповідей

XX International Scientific and Practical Conference
of Students and Young Scientists

**"MODERN PROBLEMS OF MATHEMATICS
AND ITS APPLICATION IN NATURAL
SCIENCES AND INFORMATION
TECHNOLOGIES"**

Book of Abstracts

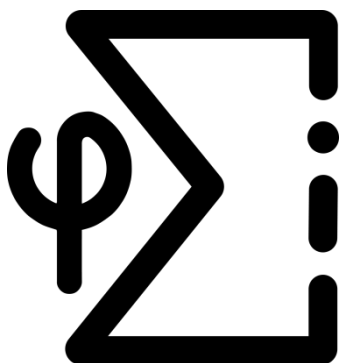


May 5-6, 2026
Kharkiv, Ukraine

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Студентське наукове товариство
факультету математики і інформатики



**Сучасні проблеми математики та її застосування в
природничих науках та інформаційних технологіях**

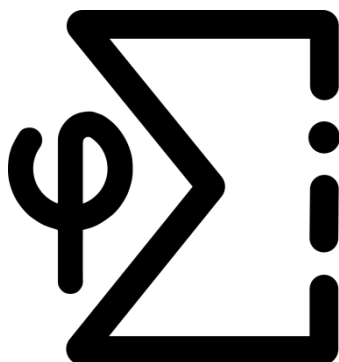
Тези доповідей
XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених

(5 - 6 травня 2026)

Харків
2026

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

V.N. Karazin Kharkiv National University
Students' Research Club
of School of Mathematics and Computer Science



**Modern Problems of Mathematics and Its Application in
Natural Sciences and Information Technologies**

Book of Abstracts of XX International
Scientific and Practical Conference
of Students and Young Scientists

(May 5–6, 2026)

Kharkiv
2026

УДК 510 (075)

*Зареєстровано Державною науковою установою
«Український інститут науково-технічної експертизи та інформації»
(Посвідчення № 934 від 10 грудня 2025 року)*

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол №12 від 10 липня 2026 року)*

Організаційний комітет конференції:

Голова Оргкомітету:

Меняйлов Є.С. – кандидат технічних наук, доцент, в.о. декана факультету математики і інформатики.

Заступники голови Оргкомітету:

Аршава О.О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент закладу вищої освіти кафедри вищої математики та інформатики;

Кузнєцова В.О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент закладу вищої освіти кафедри теоретичної та прикладної інформатики.

Секретар оргкомітету:

Воротинцев О.Ю. – здобувач освіти 2 курсу, навчання за освітньо-професійною програмою бакалавр, голова Студентського наукового товариства факультету математики і інформатики.

Редакційна колегія:

Жовтоніжко І.М., Ігнатівич С.Ю., Коробов В.І., Морозова А.Г., Селютін Д.Д., Фаворов С.Ю., Ямпольський О.Л.

Члени студентського оргкомітету:

Арзамасцев О.Д., Волкова А.О., Гуркіна О.М., Дубовський Д.О., Дудевич Т.С., Єланський В.О., Іллічова П.Д., Касьянов О.П., Малиневський А.Л., Супрун А.О., Чебітько І.І., Шевчук М.В.

Адреса оргкомітету:

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики, майдан Свободи 4, м. Харків, Україна, 61022

Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях : тези доповідей XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених (5 - 6 травня 2026 р. м. Харків, Україна) – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2026. – 231 с.

До збірки увійшли тези доповідей учасників конференції, які присвячені сучасним проблемам диференціальної геометрії та рівнянь математичної фізики, оптимального керування й стохастичного моделювання, застосування штучного інтелекту та великих мовних моделей, а також впровадженню цифрових технологій у викладання математики та інформатики. Видання призначається для здобувачів середньої та вищої освіти, викладачів і молодих науковців.

Тези подано в авторській редакції

© Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, 2026

Organizing Committee

Chairman of the organizing committee

Ievhen MENIAILOV, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Acting Dean of School of Mathematics and Computer Science, V.N. Karazin Kharkiv National University

Vice-Chairmans of the organizing committee

Olena ARSHAVA, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Vice-Dean of School of Mathematics and Computer Science for Research;

Victoriia KUZNIETSOVA, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Vice-Dean of School of Mathematics and Computer Science for Teaching

Secretary of the organizing committee

Oleksii VOROTYNTSEV, 2th year student of School of Mathematics and Computer Science, chairman of the Students' Research Club of School of Mathematics and Computer Science

Editorial Board: Favorov S.Yu, Ignatovich S.Y., Korobov V. I., Morozova A.G., Seliutin D.D., Yampolsky A.L., Zhovtonizhko I.M.

Members of the student organizing committee:

Arzamastsev Oleksandr, Chebitko Iryna, Dubovskyi David, Dudevych Tymur, Hurkina Olena, Illichova Polina, Kasyanov Oleh, Malynevskyi Anton, Shevchuk Marharyta, Suprun Alina, Volkova Alisa, Yelanskyi Vasyl

Зміст – Contents

Інформаційні технології та штучний інтелект	7
CLASSIFICATION OF APPROACHES TO TIME-SERIES ANOMALY DETECTION IN INFORMATION SYSTEMS	7
COMPARATIVE ANALYSIS OF MATHEMATICAL COLOR SPACE MODELS AND ALGORITHMIC GENERATION OF PERCEPTUALLY UNIFORM PALETTES FOR DIGITAL INTERFACES	10
COMPARATIVE STUDY OF TWO STRATEGIES FOR VISUALIZING REGULAR GRAPHS	12
DECOMPOSITION OF ARCHITECTURAL ERROR SOURCES IN MULTISENSOR RADIO MONITORING SYSTEMS	14
DYNAMIC PROGRAMMING: TYPICAL PROBLEMS AND METHODS OF THEIR SOLUTION FOR DISCRETE SYSTEMS	17
FORECASTING ETF LIQUIDITY	19
HOW DO MACHINES PICK UP LANGUAGE? WHERE LANGUAGE AND MATHEMATICS COLLIDE.....	23
SMART NEURAL CANE: AN ARTIFICIAL INTELLIGENCE-BASED ASSISTIVE SYSTEM FOR ENHANCING MOBILITY OF VISUALLY IMPAIRED INDIVIDUALS.....	26
АЛГОРИТМІЧНІ ІННОВАЦІЇ: РОЛЬ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У СУЧАСНОМУ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ	29
ВЕБ-ДОДАТОК ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНОЗЕМНИХ СЛІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ТЕХНОЛОГІЙ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ	32
ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ САМОНАВЧАННЯ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦІЇ СЕГМЕНТАЦІЇ ПОШКОДЖЕНЬ НЕСТАНДАРТНИХ ВАНТАЖІВ	34
ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМУ CAUSAL FOREST ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ УМОВНОГО СЕРЕДНЬОГО ЕФЕКТУ ВПЛИВУ НА ОСНОВІ СИНТЕТИЧНИХ ДАНИХ.....	37
ІНТЕРАКТИВНА ПАНЕЛЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТА МОНІТОРИНГУ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНОЇ СИТУАЦІЇ	40
ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА АНАЛІЗУ ВПЛИВУ ДЕМОГРАФІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ФАКТОРІВ НА ІНФЕКЦІЙНУ ЗАХВОРЮВАНІСТЬ	42
КЛАСИФІКАЦІЯ ЧАСТКОВО ВИДИМИХ ОБ’ЄКТІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ.....	44
МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ ОБРОБКИ І ЗГЛАДЖУВАННЯ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ	47
ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ГРАФІВ KAMADANN ТА NEULAY З УРАХУВАННЯМ СТРУКТУРИ СПІЛЬНОТ	50
ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ РЕСПІРАТОРНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ ЗА РЕНТГЕНІВСЬКИМИ ЗНІМКАМИ.....	54
РОЗРОБКА БАГАТОАГЕНТНОЇ СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ SDN-МЕРЕЖ З АДАПТИВНОЮ ТЕЛЕМЕТРІЄЮ	57
РОЗРОБКА ВЕБ-СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ КОРИСТУВАЧАМИ З АВТОРИЗАЦІЄЮ НА ОСНОВІ РОЛЕЙ І ТОКЕНІВ JWT У СЕРЕДОВИЩІ ASP.NET CORE.....	59
РОЗРОБКА МУЛЬТИАГЕНТНОЇ СИСТЕМИ ДИНАМІЧНОГО УПРАВЛІННЯ SDN-МЕРЕЖАМИ	61
РОЗРОБКА СИСТЕМИ ПРЕДИКТИВНОГО УСУНЕННЯ МАРШРУТИЗАЦІЙНИХ ПЕТЕЛЬ НА ОСНОВІ ТЕХНОЛОГІЙ INTENT-BASED NETWORKING	63
СТВОРЕННЯ СТРАТЕГІЇ ПОЕТАПНОГО НАВЧАННЯ ТА АНАЛІЗ ЇЇ ВПЛИВУ НА АГЕНТА RL У СЕРЕДОВИЩІ КЛАСИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	64
СУЧАСНІ ВИКЛИКИ ВПРОВАДЖЕННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ В ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕХНОЛОГІЧНІЙ ОСВІТІ	68
СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ КРИПТОГРАФІЧНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ЇХ РОЛЬ У КІБЕРБЕЗПЕЦІ.....	71
Прикладна математика	74
LATENT HIERARCHICAL CAUSAL DISCOVERY IN MENTAL HEALTH DATA	74
MATHEMATICAL APPROACHES TO SOLVING MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS	78
MULTICOMPONENT ANALYSIS OF TIME SERIES BASED ON CO ₂ EMISSION DATA	81

POPOV CRITERIA FOR STABILITY OF FORCED LUR'E SYSTEMS.....	85
THE STABLE MATCHING PROBLEM.....	88
АВТОМАТИЗАЦІЯ АНАЛІЗУ ЗВІТНИХ ДАНИХ ЩОДО РОЗПОДІЛУ І ВИКОНАННЯ НАВЧАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ PYTHON ТА DBMS.....	90
АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ОПТИМАЛЬНИХ ТРАЄКТОРІЙ ТА ЧАСУ РУХУ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ МОДЕЛІ ГРУШИНА	93
ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ БАЙЄСІВСЬКИХ ІГОР У STARCRAFT 2.....	95
ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ЗРОСТАННЯ ПУХЛИНИ З УРАХУВАННЯМ ХІМІОТЕРАПІЇ ТА ПОБІЧНОГО ЕФЕКТУ НА ІНШИЙ ОРГАН.....	100
ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ.....	102
ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗМІННОГО СТРУМУ	105
ЗАСТОСУВАННЯ ПАНЕЛЬНОГО МЕТОДУ В АЕРОДИНАМІЦІ	107
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ РОСТУ ПУХЛИНИ ДЛЯ ВИБОРУ ПЕРСОНАЛІЗОВАНОЇ ХІМІОТЕРАПІЇ.....	110
МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТНОГО АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ГЕТЕРОТОННОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ.....	114
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ КОЛОРИЗАЦІЇ МОНОХРОМНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ГЛИБИННОГО НАВЧАННЯ ТА НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ	116
МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФЕКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	118
ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ОСЦИЛЬОВАНИХ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ	120
ОДНОРІДНА АПРОКСИМАЦІЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ.....	123
ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ МНОЖИННОЇ ЛІНІЙНОЇ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ.....	126
ПОВНА ПОХИБКА ДЛЯ КУБАТУРНОЇ ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДАНИМИ НА ЛІНІЯХ.....	130
ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ. ОБЕРТАННЯ МАТРИЦІ КОРЕЛЯЦІЙ	134
ПРОГНОЗУВАННЯ КІЛЬКОСТІ ЛЮДЕЙ У ПРИМІЩЕННІ З ВИКОРИСТАННЯМ ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ	139
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ ШВИДКОДІЇ ДЛЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ	141
РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕРВАЛЬНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА	142
СТРАТЕГІЯ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ДЕТЕКЦІЇ ОБ'ЄКТІВ НА СУПУТНИКОВИХ ЗОБРАЖЕННЯХ ЗАВДЯКИ ЗАСТОСУВАННЮ АУГМЕНТАЦІЙ.....	145
ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ SDN-МАРШРУТИЗАЦІЇ ЯК КООПЕРАТИВНОЇ DEC-POMDP ТА ІНЖЕНЕРНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ QMIX-АГЕНТІВ	148
ФОРМУЛЬНІ ПОДАННЯ КУСКОВО-КУБІЧНОГО ПОЛІНОМА ЕРМІТА І КУБІЧНОГО СПЛАЙНУ	151
Фундаментальна математика	155
FUNDAMENTAL GROUPS AND COVERINGS OF GRAPHS: STRUCTURAL CONNECTIONS BETWEEN GRAPH THEORY AND ALGEBRAIC TOPOLOGY	155
ON NON DIFFERENTIABLE FUNCTIONS AND ONE-SIDED DERIVATIVES.....	158
ON WEYL DISKS VIA ORTHOGONAL POLYNOMIALS.....	159
THE NEVANLINNA MATRIX OF THE TRUNCATED HAUSDORFF MATRIX MOMENT PROBLEM VIA ORTHOGONAL MATRIX POLYNOMIALS ON $[A,B]$ FOR THE CASE OF AN EVEN NUMBER OF MOMENTS	160
ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБРИ КЕЛІ	161
ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕННИХ ПОЛІВ	163
ГЕОМЕТРІЯ ПОВЕРХОНЬ, АСОЦІЙОВАНИХ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....	165
ГРУПИ ПОВОРОТІВ ТА СИМЕТРІЙ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ НА ПЛОЩИНІ	167
МНОЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ТА ДЕЯКЕ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.....	169

МОДЕЛЬ АКсіОМАТИЧНОЇ ТЕОрії КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.....	172
ПОБУДОВА ГАМІЛЬТОНОВОГО ШЛЯХУ З ЦЕНТРУ ДОВІЛЬНОГО ГРАФА ХОДІВ КОРОЛЯ	174
СКІНЧЕННІ ТІЛА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ	177
Викладання математики та інформатики: сучасні тенденції	
та перспективи	180
ВИКОРИСТАННЯ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ	
РЕСУРСІВ	180
ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ	182
ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНИХ ПАКЕТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ	184
ДУАЛЬНА ФОРМА ЗДОБУТТЯ ОСВІТИ ЯК ОДНА З МОДЕЛЕЙ ПОЛІПШЕННЯ ЯКОСТІ	
ПІДГОТОВКИ ІТ-СПЕЦІАЛІСТІВ	188
ЕЛЕКТРОННІ ТАБЛИЦІ ЯК ДИДАКТИЧНИЙ ЗАСІБ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ	
ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У 7 КЛАСІ	190
ЗАДАЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ СТУДЕНТІВ	
ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ: ТЕОРЕТИКО-ДИДАКТИЧНИЙ ТА АЛГОРИТМІЧНИЙ	
АСПЕКТИ	192
ІНТЕГРАЦІЯ KEYС-МЕТОДІВ У НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ: МОЖЛИВОСТІ	
ТА ВИКЛИКИ	196
ІНТЕГРАЦІЯ STEM-ПІДХОДУ ДО ВИВЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ПРОФІЛЬНІЙ	
СЕРЕДНІЙ ОСВІТІ	198
ІНТЕРАКТИВНІ НАВЧАЛЬНІ РЕСУРСИ: ДОСВІД РОЗРОБКИ ТА ВИКОРИСТАННЯ	200
МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ	
КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПРОФІЛЬНИХ ЕКОНОМІЧНИХ КЛАСІВ	204
РІВНЯННЯ, ЩО МІСТЯТЬ НСД ТА НСК НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ	
З МАТЕМАТИКИ	206
СТОХАСТИКА ЯК ІНСТРУМЕНТ КРИТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ: СУЧАСНІ	
ТЕНДЕНЦІЇ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ ЗДОБУВАЧІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ...	210
ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ 5-Х КЛАСІВ ЗАСОБАМИ ЦИФРОВОГО	
МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	212
ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛА ЧЕРЕЗ МЕТОД ВИЧЕРПАННЯ	
І МЕТОД НЕПОДІЛЬНИХ	215
ЦИФРОВІ ФЛЕШ-КАРТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ЯК ІННОВАЦІЙНИЙ ІНСТРУМЕНТ	
СУЧАСНОГО ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ	218
Науково-популярна	221
ABOUT THE ANDRÉIEF IDENTITY	221
«ШЛЯХЕТНА КАСТА» ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ – ТЕОРІЯ ГРАФІВ.....	224
Мала наукова конференція	229
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДОРОЖНІХ СИТУАЦІЙ, ЩО ПЕРЕДБАЧАЮТЬ РОЗГАЛУЖЕННЯ	
ТА ЗАТОРИ	229

Інформаційні технології та штучний інтелект

Information Technologies and Artificial Intelligence

CLASSIFICATION OF APPROACHES TO TIME-SERIES ANOMALY DETECTION IN INFORMATION SYSTEMS

Bondarenko O. S.

E-mail: olha.bondarenko@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Modern information systems generate telemetry at a scale that makes manual monitoring infeasible: server fleets, distributed applications, network devices, and security infrastructure produce logs, metrics, and traces at rates ranging from thousands to millions of events per second. Undetected anomalies in these streams translate into service downtime, degraded user experience, security incidents, and violations of service-level agreements. Automated anomaly detection has therefore become a core component of operational monitoring, intrusion detection, quality assurance in industrial systems, and observability platforms for cloud-native applications [1, 3]. The practical effectiveness of such automation depends not on the availability of algorithms as such, but on the correct match between the chosen method and the operating conditions of the target system, including the type of anomaly of interest, the latency budget, and the computational resources available for inference.

The literature offers a wide spectrum of anomaly detection techniques. Statistical methods such as z-score thresholding, moving-average control charts, and ARIMA-based residual analysis are well established and computationally cheap, but rely on stationarity assumptions that often do not hold in practice [2]. Classical machine learning approaches, including Isolation Forest, one-class SVM, and Local Outlier Factor, relax distributional assumptions and handle multivariate data, yet require careful feature engineering and perform poorly when anomalies are defined by temporal or sequential structure [3,5]. Deep learning approaches, including autoencoders, variational autoencoders, and sequence models based on recurrent and transformer architectures, capture complex patterns in high-dimensional streams [4, 6]. However, these methods are typically presented as isolated algorithmic contributions, with comparisons limited to detection accuracy on a narrow set of benchmarks. The conditions under which one family is preferable to another are rarely formulated explicitly, which complicates the selection of a method for a specific information

system. In practice, this gap forces engineers to rely on ad hoc comparisons or on the most recent publication rather than on a structured view of the design space.

This work proposes a unified classification of time-series anomaly detection approaches along three independent dimensions, jointly defining the space of design choices for a given deployment. The first dimension is the method family: statistical methods, relying on explicit probabilistic models of the normal regime; classical machine learning methods, learning a decision boundary or a density estimate from data without imposing a specific distributional form; and deep learning methods, learning hierarchical representations that capture temporal and cross-signal dependencies. The second dimension is the type of anomaly addressed: point anomalies, where a single observation deviates from the expected range; contextual anomalies, where an observation is abnormal only relative to a local context such as time of day or workload regime; and collective anomalies, where a subsequence or a pattern of jointly occurring events is anomalous even though its individual components are not [1]. The third dimension is the deployment constraint: real-time detection under strict latency budgets; resource-limited settings, typical of edge devices and embedded monitoring agents; and high-volume offline analytics, where throughput rather than latency is the binding constraint. The three dimensions are orthogonal in the sense that they constrain different aspects of the design problem, and jointly they define a decision space in which each combination corresponds to a different set of viable methods. Orthogonality here is a design-space property and does not imply full independence: certain combinations, such as real-time detection of collective anomalies on resource-limited hardware, narrow the set of viable methods substantially and require either algorithmic compromises or a change in the deployment assumption. Such cases show that the classification also indicates where design choices are limited from the start.

Table 1: Recommended method families by anomaly type and deployment constraint

	Real-time detection	Resource-limited edge	High-volume offline
Point anomalies	Statistical (z-score, EWMA)	Statistical, Isolation Forest	Any family; choice driven by precision requirements
Contextual anomalies	ARIMA residuals, adaptive thresholds	Lightweight ML with local context features	Deep sequence models
Collective anomalies	Streaming representation learning	Generally infeasible without algorithmic simplification	Sequence autoencoders,

	(compromise on latency or accuracy)		transformer-based detectors
--	--	--	--------------------------------

The proposed classification supports method selection for concrete application scenarios, as summarised in Table 1. For CPU-load and memory-utilisation monitoring on individual servers, point and contextual anomalies dominate, the required latency is low, and computational resources per node are limited; statistical methods and lightweight isolation-based approaches are typically sufficient and preferable to deep models, whose inference cost is not justified by the gain in detection accuracy. For log-stream analysis in security monitoring, collective anomalies in event sequences are the principal concern, and representation-learning methods that operate on embedded sequences provide substantially better detection of coordinated activity than statistical baselines. For offline analysis of historical telemetry during incident investigation, deep autoencoder-based approaches become practical: latency is not a concern, and the data volume justifies the training cost. IoT sensor monitoring on edge nodes is a harder case. Resources are tight, sensor quality varies, and most anomalies are contextual, caused by changes in the environment rather than by real system faults. Here lightweight statistical detectors with locally adaptive thresholds tend to outperform both generic deep models and static rule-based checks. Taken together, these cases show how the classification works in practice: it narrows the choice of methods for a given system, so design decisions rest on the structure of the problem and not on trial and error.

The proposed three-dimensional classification organises the design space of time-series anomaly detection by separating the method family, the type of anomaly, and the deployment constraint. This structure makes the conditions of applicability of each approach explicit and provides a basis for motivated method selection in the design of information systems with automated monitoring. Further development concerns the extension of the classification to hybrid methods and the formulation of quantitative criteria for the boundaries between regions of the decision space.

References:

1. Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly detection: A survey. *ACM Computing Surveys*. 2009. Vol. 41, №3. Art. 15. DOI: 10.1145/1541880.1541882.
2. Hyndman R. J., Athanasopoulos G. *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed. Melbourne: OTexts, 2021. 442 p.
3. Liu F. T., Ting K. M., Zhou Z.-H. Isolation-based anomaly detection. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*. 2012. Vol. 6, №1. Art. 3. DOI: 10.1145/2133360.2133363.

4. Malhotra P., Ramakrishnan A., Anand G. et al. LSTM-based encoder-decoder for multi-sensor anomaly detection. Proceedings of ICML Anomaly Detection Workshop. 2016. P. 1–5. arXiv:1607.00148.
5. Pang G., Shen C., Cao L., Hengel A. van den. Deep learning for anomaly detection: A review. ACM Computing Surveys. 2021. Vol. 54, №2. Art. 38. DOI: 10.1145/3439950.
6. Schmidl S., Wenig P., Papenbrock T. Anomaly detection in time series: A comprehensive evaluation. Proceedings of the VLDB Endowment. 2022. Vol. 15, №9. P. 1779-1797. DOI: 10.14778/3538598.3538602.

COMPARATIVE ANALYSIS OF MATHEMATICAL COLOR SPACE MODELS AND ALGORITHMIC GENERATION OF PERCEPTUALLY UNIFORM PALETTES FOR DIGITAL INTERFACES

Sofiia Riabova

E-Mail: bobrovytska.s22@365.dnu.edu.ua

Natalia Huk

E-Mail: huk_n@365.dnu.edu.ua

Scientific advisor: N.A. Huk

Oles Honchar Dnipro National University

Accurate color reproduction and processing is a fundamental challenge in modern digital systems - spanning computer graphics, printing, interface design, and machine vision. Despite the widespread practical use of color models, the comparative analysis of their perceptual uniformity and suitability for automated color generation remains an open research question. Existing approaches typically address either the measurement of conversion losses or palette generation, rarely combining both directions within a unified framework.

The aim of this work is a systematic analysis of the main mathematical color space models - RGB, HSV, CMYK, and CIELAB - with respect to their perceptual properties, as well as the development of algorithmic methods for generating multi-level color palettes for digital interfaces based on perceptually oriented models.

The theoretical foundation of the study is a comparative analysis of device-dependent (RGB, HSV, CMYK) and device-independent (CIELAB) color spaces. The RGB model is additive and grounded in the trichromatic nature of human vision, yet it is not perceptually uniform. The HSV model, while convenient for intuitive color selection, is derived from RGB and does not compensate for perceptual non-uniformity. The subtractive CMYK model is oriented toward printing technology and relies on device ICC profiles. By contrast, the CIELAB color space, developed by the

International Commission on Illumination in 1976, is device-independent and approximately uniform with respect to visual perception: the Euclidean distance between two points in this space approximately corresponds to the subjective color difference perceived by a human observer.

Color difference metrics are applied for the quantitative assessment of perceptual losses during color space conversions. The simple Euclidean distance CIE76 provides only a first approximation; more accurate results are achieved using the refined formulas CIE94 and CIEDE2000 (ΔE_{00}), which account for the non-linearity of lightness, chroma, and hue perception. Practical analysis showed that direct $RGB \rightarrow HSV$ and $RGB \rightarrow CIELAB$ conversions yield average ΔE values in the range of 64-157, whereas reverse conversions using the same mathematical formulas achieve $\Delta E < 0.5$. $RGB \rightarrow CMYK$ conversion via ICC profiles produces significantly lower losses than the formula-based approach ($\Delta E \approx 5-16$ vs. 15-37).

Based on the theoretical findings, an algorithm for the automatic generation of multi-level color palettes of the 50-950 type was developed - a format widely used in modern design systems such as Tailwind CSS and Material Design. The key distinction of the proposed approach from traditional HSL-based methods lies in the use of the CIELAB space for controlling lightness and chroma: the L^* coordinate values are fixed for each scale level, while the hue vector direction in the a^*-b^* plane is preserved. This ensures stable contrast between shades regardless of the input color and eliminates unwanted hue shifts at the extremes of the scale.

Quantitative evaluation of the generated palettes using the ΔE_{00} metric confirmed that the LAB-oriented algorithm produces a significantly more uniform distribution of perceptual difference between adjacent levels compared to the HSL-based approach, with fewer critical deviations. Both algorithms were implemented as software tools: an interactive Python application using NumPy, Matplotlib, and skimage for analyzing conversion losses in images, and a Figma plugin (JavaScript, Figma Plugin API) for palette generation directly within the design environment, with automatic saving of color styles and variables.

The results of this work demonstrate that the use of perceptual color models is a prerequisite for obtaining high-quality, predictable, and accessible color solutions in digital systems. The developed tools can be applied both in scientific research in colorimetry and in practical tasks of interface design, color correction, and print production preparation.

References:

1. Seymour J. Six Things You Should Not Do with CIELAB // TAGA, 2022. - URL: <https://www.researchgate.net/publication/362680431> (Дата звращения 20.03.2026)

2. Sharma G., Wu W., Dalal E. N. The CIEDE2000 color-difference formula // Color Research & Application. - 2005. - URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/col.20070> (Дата звернення 20.03.2026)
3. CIE. Colorimetry. CIE Publication No. 15:2018. - URL: <https://cie.co.at/publications/colorimetry-4th-edition> (Дата звернення 20.03.2026)
4. Figma Plugin API Documentation. - URL: <https://www.figma.com/plugin-docs/> (Дата звернення 20.03.2026)
5. Tailwind Labs. Customizing Colors in Tailwind CSS. - URL: <https://tailwindcss.com/docs/customizing-colors> (Дата звернення 20.03.2026)

COMPARATIVE STUDY OF TWO STRATEGIES FOR VISUALIZING REGULAR GRAPHS

Mysyk O.F.

E-mail: mysyk2021mf12@student.karazin.ua

Academic advisor: Polyakova Lyudmyla

V. N. Karazin Kharkiv National University

The object of the study was the process of algorithmic visualization of regular graphs in two-dimensional space.

The subject of the study was the comparative effectiveness of two strategies for two-dimensional visualization of regular graphs: preliminary construction of a layout in multidimensional space followed by projection into 2D (“ND $\rightarrow$ 2D”), and direct construction of a graph layout immediately in two-dimensional space (“2D”).

The research hypothesis was that, for some regular graphs, the strategy of preliminary construction in a high-dimensional space followed by PCA projection into 2D may provide a more favorable combination of visualization speed and quality than direct two-dimensional layout construction.

When implementing the “ND $\rightarrow$ 2D” approach for regular graphs of degree k , it is assumed that the best results should be obtained when the initial layout is constructed in a space of dimension k .

The aim of the study was to determine under what conditions, for the selected classes of regular graphs, the two-stage “ND $\rightarrow$ 2D” construction is more justified than direct 2D construction in terms of execution time and the quality of the final visualization.

To construct graph layouts in multidimensional space, algorithms based on physical models are used [1, 2]. In these algorithms, a graph is represented as a system of interacting particles, that is, vertices that repel one another, while the edges

connecting the vertices define attractive forces between them. The layout is constructed as a search for the equilibrium state of this system, in which the graph structure becomes visually readable: elements connected by edges are placed closer to one another, distances between vertices become more balanced, and the overall layout better reflects the topology of the graph.

For the experiment, an experimental set of regular graphs was formed, including the following classes: hypercube, complete, torus, grid, Johnson, Hamming, and Platonic graphs. A system of comparison criteria was also defined, including not only execution time but also drawing quality. Comparative experiments were conducted for the two layout strategies on the selected graphs.

As a result, it was determined that for multidimensional cubes, the “ $ND \rightarrow 2D$ ” strategy provides a time advantage, provided that the preliminary layout for a k -dimensional cube is constructed in a space of dimension k . This strategy also produces a more natural representation of the graph, since the multidimensional faces of the cube are visually identifiable in the layout (Fig. 1).

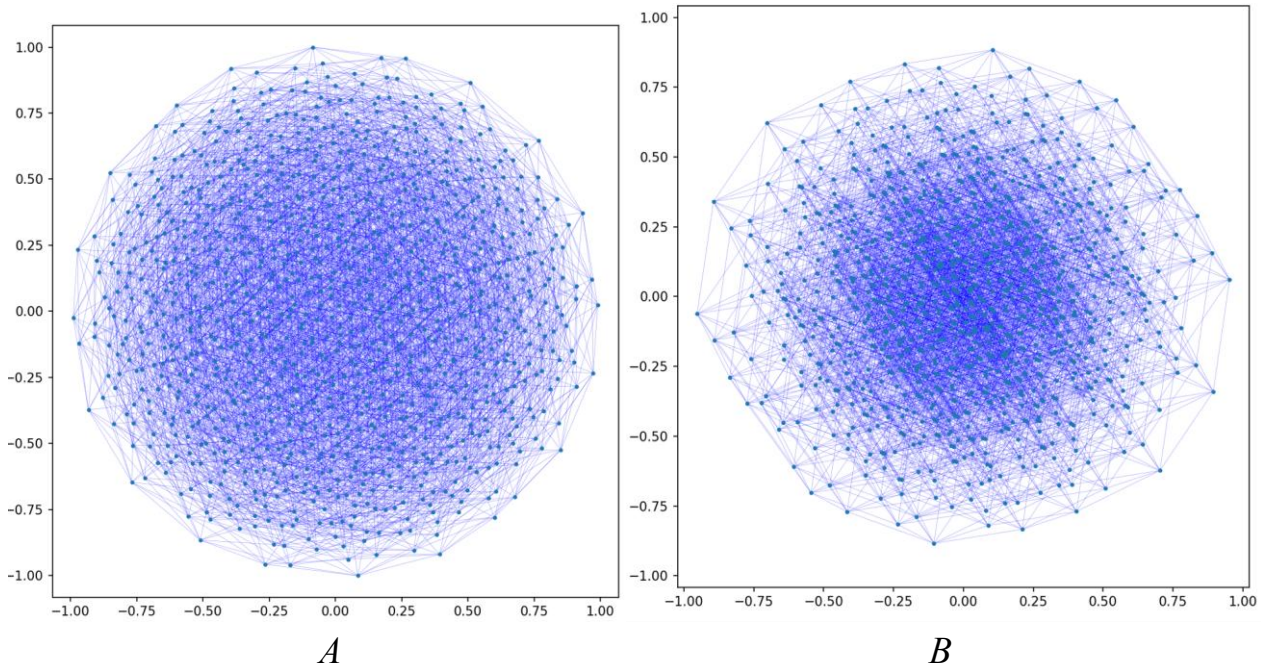


Fig. 1: Layout of a 10-dimensional hypercube: A — the “2D” strategy; B — the “ $ND \rightarrow 2D$ ” strategy.

References:

1. Kamada, T. & Kawai, S. An algorithm for drawing general undirected graphs. Information Processing Letters, 1989, vol. 31, iss. 1, pp. 7-15. DOI: 10.1016/0020-0190(89)90102-6.
2. Fruchterman, T. J. & Reingold, E. M. Graph drawing by force-directed placement. Software: Practice and Experience, 1991, vol. 21, iss. 11, pp. 1129-1164. DOI: 10.1002/spe.4380211102.

DECOMPOSITION OF ARCHITECTURAL ERROR SOURCES IN MULTISENSOR RADIO MONITORING SYSTEMS

Bondarenko O. S.

E-mail: olha.bondarenko@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Distributed multisensor radio monitoring systems operate under high signal density, mutual interference, propagation channel instability, and temporal asynchrony of sensor observations, while their nodes differ in frequency range, bandwidth, noise level, and antenna directivity. The central performance indicator of such systems is the probability of an erroneous decision P_{err} , which combines the probabilities of false alarm and missed detection. A substantial portion of this error, however, does not originate at the decision stage: it accumulates earlier, during preprocessing, inter-node transmission, and temporal alignment of sensor streams, before any fusion algorithm is applied. Such contributions are determined by system architecture rather than by the choice of fusion rule, and no algorithmic change can reduce them once the pipeline is fixed.

The algorithmic side of data fusion, covering Bayesian combination rules, evidence theory, ensemble models, and deep neural networks, is well addressed in the literature [1, 4, 6]. Distributed detection theory shows that centralised processing reaches the highest accuracy under ideal conditions, while local-decision and feature-level schemes sacrifice accuracy for lower communication load [2, 5, 7]. Infrastructure aspects such as synchronisation, stream calibration, and channel quality are addressed in standards and engineering practice, but are treated as implementation details rather than as factors that directly determine the achievable lower bound of P_{err} . As a result, among architecture-level design choices, the fusion level is routinely treated as a fixed engineering constraint rather than a design variable, and no structured decomposition of the architectural contributions to P_{err} into distinct, independently controllable sources exists in the literature. This limits the ability to prioritise error-reduction measures when algorithmic choices are fixed by external constraints.

This work introduces a joint optimisation problem in which the fusion architecture A covers the fusion level λ (primary measurements, features, or local decisions), the preprocessing operator T_λ , and the decision rule δ , and proposes a decomposition of the architectural contributions to P_{err} into three independent mechanisms: fusion level, infrastructure-level synchronisation, and uncertainty-aware combining. Each mechanism operates on the information conditions of the decision

problem independently and complements the others, addressing a distinct structural source of error.

The first mechanism is the fusion level. Performing data combination at the level of spectrograms, cyclic spectra, or feature vectors rather than over primary I/Q streams fixes an information loss prior to fusion that bounds accuracy from below. From the data processing inequality and the Fano inequality it follows that any preprocessing which fails to preserve a sufficient statistic for the hypotheses raises the lower bound of P_{err} , and no downstream algorithm can undo this. A classification of fusion approaches by data representation level is proposed, allowing algorithmic optimality and information completeness to be assessed together. In this view, centralised processing at the primary level sets the accuracy ceiling, local-decision fusion at the decision level often represents the lower-performing boundary among standard architectures, and feature-level schemes lie in between depending on how much hypothesis-relevant structure the extraction operator retains.

The second mechanism is infrastructure-level synchronisation. Independent clock offsets and drifts across distributed nodes add an error component indistinguishable from genuine hypothesis uncertainty at the fusion stage. This component cannot be reduced by any combining rule and must be eliminated at the source via precise time distribution. Synchronisation standards such as IEEE 1588 provide the engineering means for this, but they are rarely considered jointly in the radio monitoring literature with uncertainty quantification methods as complementary architecture-level mechanisms for reducing P_{err} .

The third mechanism is uncertainty-aware fusion. Treating the outputs of sensors with heterogeneous noise levels and calibration accuracy as equally reliable inflates P_{err} ; quality-aware weighting and calibrated probabilistic outputs limit this contribution [3]. Uncertainty-aware fusion is particularly effective when sensor quality varies dynamically, as calibrated confidence estimates allow the combining rule to down-weight degraded streams in real time without modifying the decision rule itself.

The three mechanisms address distinct structural sources of error: omitting any of them leaves the corresponding contribution to P_{err} insufficiently controlled. The decomposition recasts engineering parameters as major accuracy factors and provides a basis for prioritising design investments. In bandwidth-limited deployments the dominant gain comes from shifting the fusion level toward earlier representations; in geographically distributed systems it comes from synchronisation accuracy; in heterogeneous sensor arrays it comes from stream-quality calibration and uncertainty-aware weighting. In systems where the fusion level cannot be changed due to legacy constraints, the proposed formulation identifies the resulting irreducible error

contribution and separates it from the algorithmic component, which remains open to optimisation.

The relative weight of the three mechanisms is not fixed but depends on the operating regime of the system. When the primary stream is available and the channel permits centralised processing, the fusion level is close to optimal and the remaining error budget is dominated by synchronisation and sensor-quality factors; conversely, when bandwidth constraints enforce decision-level fusion, the information-theoretic loss becomes the limiting factor and further investment in synchronisation accuracy yields diminishing returns. A practical consequence is that architectural decisions should be ordered: the fusion level is chosen first, as it fixes the attainable ceiling; the synchronisation regime is selected next, to remove the timing-induced floor; and uncertainty-aware weighting is introduced last, adapting the combining rule to residual stream-quality variation. This ordering also clarifies the role of each mechanism in modernisation scenarios, where partial upgrades of legacy infrastructure must be prioritised under a fixed budget, and where changing the fusion level is typically the most costly intervention while synchronisation and uncertainty-aware combining can often be deployed incrementally.

The achievable bound of P_{err} is thus a property of the system architecture, not only of the algorithm, and joint design of the fusion level, preprocessing procedure, synchronisation regime, and uncertainty-aware combining rule is a necessary condition for minimising the probability of error. The proposed decomposition can serve as a decision-support tool for architecture selection and modernisation planning under prescribed P_{err} requirements.

References:

1. Abdar M., Pourpanah F., Hussain S. et al. A review of uncertainty quantification in deep learning: techniques, applications and challenges. *Information Fusion*. 2021. Vol. 76. P. 243–297. DOI: 10.1016/j.inffus.2021.05.008.
2. Ciuonzo D., Salvo Rossi P., Varshney P. K. Distributed detection in wireless sensor networks under multiplicative fading via generalized score tests. *IEEE Internet of Things Journal*. 2021. Vol. 8, №11. P. 9059-9071. DOI: 10.1109/JIOT.2021.3056325.
3. IEEE Standard for a Precision Clock Synchronization Protocol for Networked Measurement and Control Systems. *IEEE Std 1588-2019*. 2020. 499 p. DOI: 10.1109/IEEESTD.2020.9120376.
4. Kay S. M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Vol. II: Detection Theory*. Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1998. 688 p.
5. Meng T., Jing X., Yan Z., Pedrycz W. A survey on machine learning for data fusion. *Information Fusion*. 2020. Vol. 57. P. 115-129. DOI: 10.1016/j.inffus.2019.12.001.

6. Poor H. V. An Introduction to Signal Detection and Estimation. 2nd ed. New York: Springer, 1994. 398 p.
7. Varshney P. K. Distributed Detection and Data Fusion. New York: Springer, 1997. DOI: 10.1007/978-1-4612-1904-0.

DYNAMIC PROGRAMMING: TYPICAL PROBLEMS AND METHODS OF THEIR SOLUTION FOR DISCRETE SYSTEMS

Datchenko D. D.

E-mail: danylo.datchenko@student.karazin.ua

Academic Advisor: Revina T. V.

E-mail: t.revina@karazin.ua

V. N. Karazin Kharkiv National University

- **The statement of the Dynamic Programming problem** (*Kappen H. J. [4]*)

Consider the control of a discrete time dynamical system:

$x_{t+1} = x_t + f(t, x_t, u_t), t = 0, 1, \dots, T - 1$ where x_t is an n-dimensional vector describing the state of the system and u_t is an m-dimensional vector that specifies the control or action at time t.

Define a cost function that assigns a cost to each sequence of controls:

$C(x_0, (u_0, u_1, \dots, u_{T-1})) = \varphi(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} R(t, x_t, u_t)$ where $R(t, x, u)$ is the cost that is associated with taking action u at time t in state x , and $\varphi(x_T)$ is the cost associated with ending up in state x_T at time T .

Introduce the optimal cost $J(t, x_t) = (\varphi(x_T) + \sum_{s=t}^{T-1} R(s, x_s, u_s))$ which solves the optimal control problem from an intermediate time t until the fixed end time T , starting at an arbitrary location x_t .

- **Bellman's principle of optimality**

Theorem . (*Bellman R. [1]*) **PRINCIPLE OF OPTIMALITY.** *An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decisions are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decisions.*

Let us formulate the solution algorithm presented in the book [4]. The algorithm to compute the optimal control $u_{(u_0, u_1, \dots, u_{T-1})}^*$, the optimal trajectory $x_{(u_1, \dots, u_T)}^*$ and the optimal cost has such steps:

1. Initialization: $J(T, x) = \varphi(x)$
2. Backwards: For $t = T - 1, \dots, 0$ and for all x compute

$$u_t^*(x) = \arg \{R(t, x, u) + J(t + 1, x + f(t, x, u))\} \quad J(t, x) = R(t, x, u_t^*) + J(t + 1, x + f(t, x, u_t^*))$$

3. Forwards: For $t = 0, \dots, T - 1$ compute $x_{t+1}^* = x_t^* + f(t, x_t^*, u_t^*(x_t^*))$

- *The objective of this study is as follows:*

1. To research **typical problems of Dynamic Programming:**

- a. Gold Mine problem [2]

- b. Knapsack problem [3]

- c. The resource allocation problem [5]

- d. The optimal investment problem

2. Research methods of their solving.

Let us consider an example of solving Gold Mine problem from [2].

Given a gold mine represented as $A = (a_{ij}), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, where each cell contains a positive integer indicating the amount of gold (in tons) available in that field. The miner can start from any row in the first column. From any cell, the miner is allowed to move in one of the following three directions:

- Diagonally up-right.
- Directly right.
- Diagonally down-right.

The miner continues moving in this way until reaching the last column or until no further move is possible. Find the maximum amount of gold the miner can collect following these rules.

Examples:

Input $A = [1 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4 \ 0 \ 6 \ 4]$:

Output: 12

Explanation: The miner starts from the second row of the first column (collecting 2 tons of gold), moves to the third row of the second column (collecting 6 tons of gold), and then to the second row of the third column (collecting 4 tons of gold), for a total of $2 + 6 + 4 = 12$ tons of gold collected.

Input $A = [1 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 2 \ 4 \ 1 \ 5 \ 0 \ 2 \ 3 \ 0 \ 6 \ 1 \ 2]$:

Output: 16

Explanation: The miner starts from the third row of the first column (collecting 5 tons of gold), moves to the second row of the second column (collecting 2 tons), then to the second row of the third column (collecting 4 tons), and finally to the first row of the fourth column (collecting 5 tons), for a total of $5 + 2 + 4 + 5 = 16$ tons of gold collected

Several methods are available for solving the Gold Mine problem, including:

1. *Method: [Naive Approach] Recursive Depth-First Search (DFS)*
2. *Method: Top-Down Dynamic Programming (Memoization) - $O(n \times m)$ Time and $O(n \times m)$ Space*

3. *Method: Bottom-Up Dynamic Programming (Tabulation)* - $O(n \times m)$ Time and $O(n \times m)$ Space
4. *Method: Space-Optimized Tabulation* – $O(n \times m)$ Time and $O(n)$ Space
5. *Method: In-place Dynamic Programming from Right to Left* - $O(n \times m)$ Time and $O(1)$ Space

- **Conclusion**

According to source [4], Dynamic Programming is recognized as a universal approach for solving optimization problems characterized by overlapping subproblems. Examples that were considered - *the "Gold Mine", the knapsack problem, resource allocation, and optimal investment* - demonstrate how the correct identification of states and the construction of recursive relationships allow us to effectively find optimal solutions. The key skill remains the ability to formalize a problem in terms of Dynamic Programming, which opens the way to solving a wide range of practical problems in economics, logistics, project management, and other fields.

References:

1. Bellman R. "The Theory of Dynamic Programming" 1954, 55 p.
2. GeeksforGeeks. "Gold Mine Problem":
<https://www.geeksforgeeks.org/dsa/gold-mine-problem/> (Accessed: 03.03.2026)
3. GeeksforGeeks. "0/1 Knapsack Problem":
<https://www.geeksforgeeks.org/dsa/0-1-knapsack-problem-dp-10/> (Accessed: 03.03.2026)
4. Kappen H. J. "Optimal Control Theory and the Linear Bellman Equation" 2011, 34 p.
5. Studyit2.blogspot.com. "Method for solving the resource allocation problem via Dynamic Programming" 2017, <http://studyit2.blogspot.com/2017/01/blog-post.html> (Accessed: 03.03.2026)

FORECASTING ETF LIQUIDITY

Akym Davydov

E-mail: akymdavyd@gmail.com

Scientific Advisor: Revina Tetiana

Johannes Kepler Universität Linz (JKU)

Market liquidity describes how easily an asset can be traded without causing large price movements.

Since liquidity cannot be directly observed, empirical studies rely on proxies constructed from trading data. This study uses the Amihud illiquidity measure (Amihud, 2002).

$$ILLIQ_t = \frac{|R_t|}{DollarVolume_t} \quad (1)$$

where R_t denotes the asset return and $DollarVolume_t$ is the traded dollar volume on day t .

This study investigates whether daily ETF liquidity is predictable at a one-day horizon. Using log Amihud illiquidity as the forecasting target, the analysis compares a naive persistence benchmark, autoregressive models, and nonlinear machine learning methods, and tests robustness across macroeconomic regimes and different ETFs.

The empirical analysis uses daily data for the Technology Select Sector ETF (XLK). Robustness tests are conducted on additional ETFs representing different market segments: SPY (S&P 500), IWM (Russell 2000), and XLF (Financial Sector).

Because the raw Amihud ratio is highly skewed and exhibits occasional extreme spikes, the forecasting target is defined as the logarithm of the illiquidity measure. The final target variable is therefore

$$Log_ILLIQ_t = \log (ILLIQ_t) \quad (2)$$

which produces a more stable time series suitable for regression-based forecasting models.

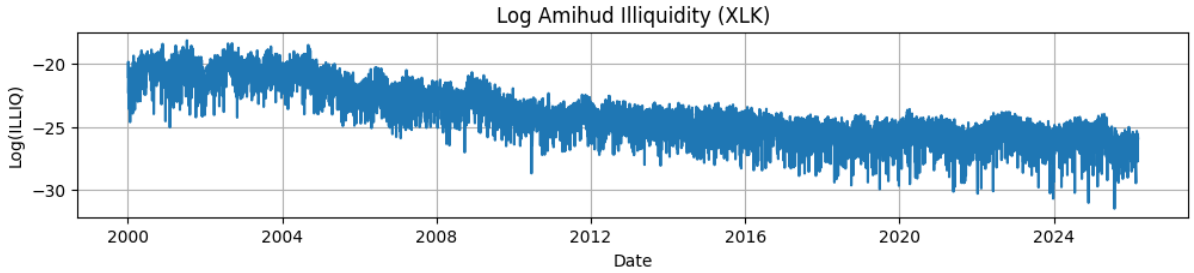


Fig. 1: Natural Logarithm of Amihud Illiquidity

The forecasting task is formulated as a **one-step-ahead time-series prediction problem**, where the objective is to estimate the next-day value of Log_ILLIQ .

To ensure realistic evaluation, all models are tested using a **walk-forward expanding-window framework**. At each step, the model is trained using only past observations and then used to generate a one-day-ahead forecast. The training sample expands over time as new observations become available. Forecast accuracy is measured using **RMSE** and **MAE**.

The analysis begins with a **naïve persistence benchmark**, where the next-day liquidity level is assumed to equal the current observation. This provides a strong baseline for financial time series, where many variables exhibit substantial persistence.

The primary forecasting model is an **autoregressive specification with 20 lags (AR(20))**, designed to capture multi-day liquidity dynamics. Relative to the naïve persistence benchmark, the AR model produces a substantial improvement in forecasting accuracy. For the main dataset (XLK), AR(20) reduces RMSE by approximately **27–29%**, indicating that daily liquidity contains strong multi-day persistence rather than behaving as a purely random process.

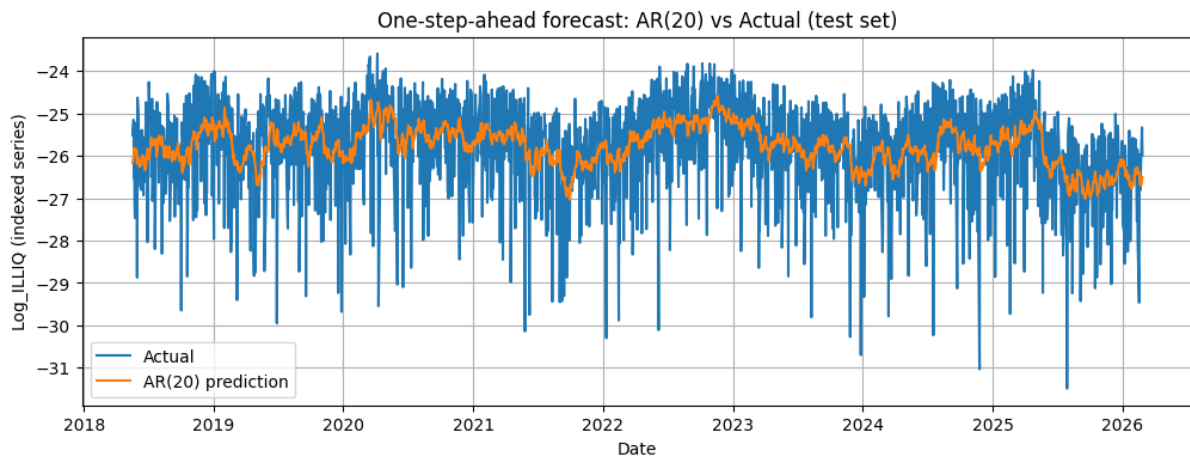


Fig. 2: AR(20) one-step-ahead forecast of log illiquidity versus actual values.

To examine whether market conditions contribute additional predictive information, the autoregressive specification is augmented with **lagged volatility measures**. The estimated coefficients reveal a stable **negative relationship between past volatility and future liquidity**, meaning that higher volatility tends to be followed by higher illiquidity. However, incorporating volatility into the linear model yields only **marginal improvements in forecasting accuracy**, suggesting that much of this information is already captured by the autoregressive structure of liquidity itself.

Finally, a **Gradient Boosting regression model** is implemented to test whether nonlinear interactions between liquidity, volatility, and recent market conditions provide additional predictive power. The nonlinear model improves forecasting performance by approximately **4–5% relative to the AR benchmark**. Although the improvement is moderate, it indicates the presence of nonlinear effects—particularly in the interaction between volatility and liquidity during periods of elevated market stress.

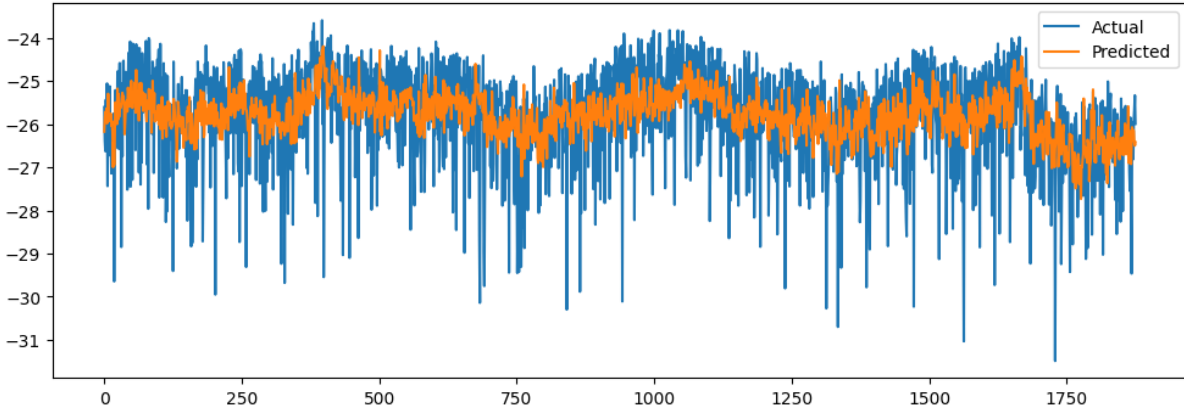


Fig. 3: HGB one-step-ahead forecast of log illiquidity versus actual values.

To test robustness across market conditions, the analysis is repeated across several macroeconomic regimes, including the pre-GFC period, the financial crisis, the post-crisis QE environment, and the COVID/tightening cycle. In all regimes, the AR(20) model outperforms the naive benchmark with RMSE improvements of about 26–31%, indicating a stable autoregressive structure despite changing liquidity and volatility conditions.

To test whether this persistence is specific to a single asset, the analysis is replicated for additional ETFs representing different segments of the market: **SPY** (S&P 500), **IWM** (Russell 2000), and **XLF** (Financial sector). Despite differences in market capitalization, sector exposure, and baseline liquidity, the forecasting results are highly similar. In each case, autoregressive models deliver improvements over the naive benchmark of roughly **25–31%**, closely matching the results obtained for XLK.

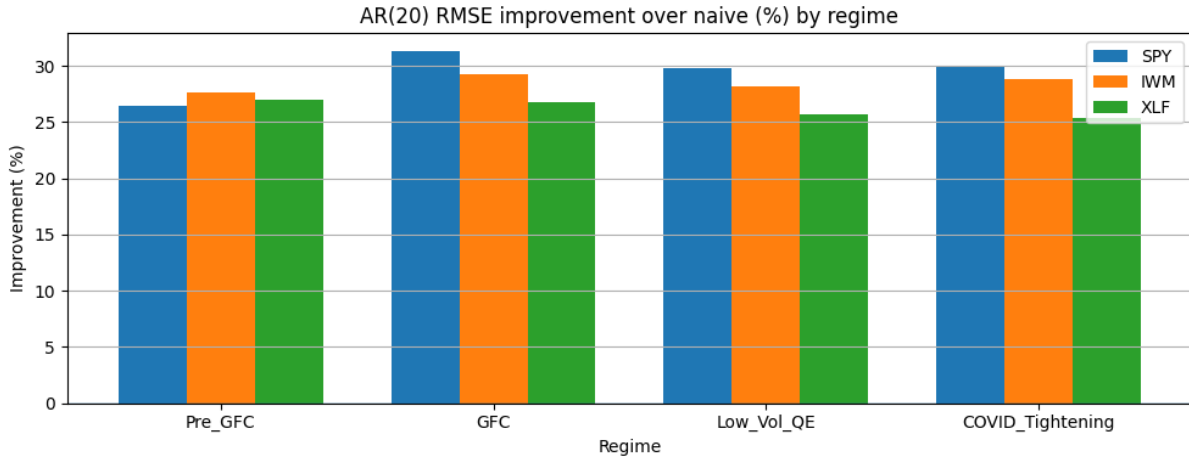


Fig. 4: AR(20) RMSE improvement over naive benchmark by regime and ETF.

Taken together, these findings suggest that short-horizon liquidity persistence is not limited to a particular asset or market environment. Instead, it appears to reflect a **general structural property of ETF liquidity dynamics**, remaining stable across both macroeconomic regimes and different segments of the equity market.

ETF liquidity exhibits strong short-horizon persistence: AR models reduce forecast error by roughly 25–30% relative to the naive benchmark. The analysis also

reveals a **stable negative relationship between volatility and subsequent liquidity**, consistent with market participants widening spreads and reducing risk during turbulent periods. The additional improvement from Gradient Boosting (about **4–5%**) suggests that part of this volatility–liquidity relationship is nonlinear, particularly during stress episodes. Importantly, these patterns remain stable across different macroeconomic regimes and across multiple ETFs, suggesting that liquidity persistence represents a **structural feature of ETF trading dynamics** rather than an asset-specific or regime-dependent effect.

References:

1. Amihud, Y. Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects. *Journal of Financial Markets*, (2002), 5(1), 31–56.
2. Chordia, T., Roll, R., & Subrahmanyam, A. Evidence on the speed of convergence to market efficiency. *Journal of Financial Economics*, (2005), 76(2), 271–292.

HOW DO MACHINES PICK UP LANGUAGE? WHERE LANGUAGE AND MATHEMATICS COLLIDE

Hutsalenko S.Y.

E-mail: sophisha2006@gmail.com

Academic advisor: Renska I.I.

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

The evolution of machine translation has transformed linguistic knowledge into a sophisticated mathematical instrument. Where software engineering meets linguistics, human language is turned into mathematical data [7, 10]. To understand how this works, we need to look at how computers combine large datasets with math to recognise patterns in the way we communicate.[5, 10]

The mathematics behind today's translation systems is not founded on a single branch, but rather on an integrated system composed of linear algebra, calculus, probability, and information theory. Linear algebra serves as the structural backbone of neural machine translation. Calculus functions as the learning engine for modern translation systems. Probability and information theory provide the core modelling and evaluation frameworks.[5, 10]

The main engine of modern Machine Translation (MT) is Corpus Linguistics, utilising massive, structured collections of authentic texts. [1,2] Unlike monolingual studies, MT relies specifically on multilingual parallel corpora consisting of source texts strictly aligned with their target translations, such as the extensive databases of

English and Ukrainian sentence pairs. [8] The availability of raw data allows software to compare and map meanings across languages, representing a major shift from Rule-Based Machine Translation (RBMT). While RBMT depended on linguists manually coding rules, modern Statistical (SMT) and Neural Machine Translation (NMT) systems learn through mathematical pattern recognition. By evaluating entire sentences to spot statistical relationships, deep learning algorithms model human linguistic logic without explicit grammar instruction[1, 10]. SMT reframed translation as a mathematical decision theory problem: identifying the target sentence with the highest conditional probability given the source sentence, largely driven by Bayes' theorem. The fundamental equation of statistical machine translation involves finding the string that maximises the product of the language model probability and the translation model probability. In modern neural architectures, these probabilistic concepts remain crucial.[10]

This data-driven transition is particularly critical for morphologically complex languages like Ukrainian. Unlike English, which relies on strict word order, Ukrainian utilises intricate inflectional morphology (prefixes, suffixes, and endings) to establish syntactic relationships. Consequently, the success of NMT is entirely dependent on high-quality parallel data; if data is sparse, the system's tokenizer struggles, breaking words into long, inefficient sequences that hinder performance [9]. High-quality data serves as the essential bridge for the machine to recognise and generate complex syntactic structures accurately [8]. Training a machine translation model is fundamentally an optimization problem, where the goal is to seek optimal solutions within an ultra-high-dimensional parameter space containing billions of variables.

Modern systems represent words, sentences, and texts not as linear symbols, but as abstract vectors and tensors situated in high-dimensional semantic spaces. Meaning is represented geometrically through spatial distances and directions, which allows machines to compute and transform semantic content within a unified mathematical framework. Before operation, corpora undergo preprocessing — deduplication, language identification, and semantic similarity filtering — ensuring that only accurate alignments (typically similarity scores between 0.75 and 0.99) are used for training [6].

The refined text is then segmented into tokens, a major engineering challenge for languages where default tokenizers are often inefficient [9]. When tokens are fractured too heavily, they lose semantic value, forcing attention layers to waste excessive computational power. To solve this, engineers develop language-specific tokenizers and employ "Trans-Tokenization" to align units across language pairs. Utilising tools like Fast Align, this "semantic bridge" identifies tokens sharing the same contextual space and transfers mathematical embeddings from source to target. These

tokens are transformed into high-dimensional vector representations, allowing human language to be processed as structured mathematical data [9].

Translation systems then utilise the Transformer architecture, which revolutionised the field by processing sentences in parallel rather than word-by-word[4, 10]. This architecture employs an encoder-decoder framework to create abstract vector representations and sequentially generate target output. Its true power lies in the Multi-Head Attention mechanism, which determines the contextual importance of specific words by assigning Query, Key, and Value vectors to each token. By calculating mathematical weights through these vectors, the system tracks syntactic dependencies, pragmatics, and complex multiword terms[3].

Ultimately, mathematics acts as a universal meta-language connecting human languages with exact computational representations, utilising these distinct mathematical branches as a coherent and interdependent system to achieve translation[5, 10].

STATEMENT ON THE USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

In preparing the manuscript I used the artificial intelligence tools NotebookLM, Gemini for data analysis and DeepL, Grammarly exclusively for stylistic revision, spell-checking, grammar correction, and translation refinement of English-language. The author takes full responsibility for the content and integrity of the final manuscript.

References:

1. Ali E. A. M., Al-Gamal A. A. M. Corpus-based Machine Translation. *International Journal of Research and Analytical Reviews (IJRAR)*. 2021. Vol. 8, Issue 3. P. 1–6.
2. Ali E. A. M., Al-Gamal A. A. M. Corpus-based Machine Translation [Electronic resource]. 2021.
3. Cabezas-García M., León-Araúz P. Machine versus corpus-based translation of multiword terms. *LLC*. 2023. Vol. 38, Suppl. 1.
4. Cui M., Gao P., Liu W., Luan J., Wang B. Multilingual Machine Translation with Open Large Language Models at Practical Scale: An Empirical Study. *NAACL*. 2025. P. 5420–5443.
5. Kanan T. M. The Mathematics of Translation: Analyzing Linguistic Structures Through Mathematical Models. *International Journal of Applied Mathematics*. 2025. Vol. 38, No. 6s.
6. Kardos M. Blazing Fast Fuzzy Search in Python with Neofuzz [Electronic resource] / M. Kardos // TDS Archive. – 2023. – Mode of access: <https://towardsdatascience.com/> (date of access: 07.04.2026).
7. Lano K., Kolahdouz-Rahimi S. et al. Program translation using model-driven engineering. *Automated Software Engineering*. 2024. Vol. 31, No. 20.
8. Matvieieva S. A., Lemish N. Ye., Zernetska A. A. et al. English-Ukrainian

- Parallel Corpus: Prerequisites for Building and Practical Use in Translation Studies. *Studies about Languages*. 2022. No. 40. P. 61–74.
9. Remy F., Delobelle P., Avetisyan H. et al. Trans-Tokenization: Language Adaptation of LLMs for Low-Resource NLP. *First Conference on Language Modeling*. 2024.
 10. Wu H., Wang K. Machine Translation and Mathematics: From Thought to System. *International Journal of Education and Humanities*. 2025. Vol. 21, No. 2. P. 43–52.

SMART NEURAL CANE: AN ARTIFICIAL INTELLIGENCE–BASED ASSISTIVE SYSTEM FOR ENHANCING MOBILITY OF VISUALLY IMPAIRED INDIVIDUALS

Kerlous Samy Hanna Ibrahim

E-mail: Kerloussamyhanna1@gmail.com

Supervisor : Nouara Emrajae Elazirg Elammari

Libyan University of Modern Sciences and Technology

Introduction

Visual impairment is a major global health challenge that significantly affects independence, safety, and quality of life. Individuals with visual disabilities often face continuous difficulties in spatial orientation and obstacle avoidance, particularly in unfamiliar or dynamic environments.

The most widely used assistive device is the traditional white cane, which provides basic tactile feedback through direct physical contact with obstacles. Although it is simple, reliable, and widely accessible, its effectiveness is inherently limited by the short detection range and the absence of anticipatory warning mechanisms. As a result, users often detect obstacles only at very close distances, which reduces reaction time and increases the likelihood of collisions or unsafe navigation.

With the rapid development of artificial intelligence, embedded systems, and low-cost sensing technologies, new opportunities have emerged for designing intelligent assistive devices. These technologies enable real-time environmental perception, adaptive feedback, and improved decision support for users during movement. Recent research has demonstrated that integrating sensors with computational processing can significantly enhance mobility assistance compared to conventional tools.

Within this context, the Smart Neural Cane Is introduced as an intelligent assistive system designed to extend the capabilities of the traditional white cane. It aims

to provide early obstacle detection, distance estimation, and real-time multimodal feedback, thereby improving user awareness and mobility safety. The system represents a transition from purely mechanical assistance to semi-intelligent human-machine interaction.

Aim

This study aims to design, implement, and evaluate a Smart Neural Cane as an Intelligent assistive mobility system for visually impaired individuals, focusing on improving obstacle detection accuracy, reducing response time, and enhancing overall navigation safety in controlled environments.

The study further aims to investigate the effectiveness of integrating ultrasonic sensing, motion detection, and real-time signal processing into a unified assistive framework. This includes evaluating how different obstacle distances influence system responsiveness and how multimodal feedback (vibration and audio signals) supports user decision-making during movement.

A key objective is to conduct a rigorous comparative experimental analysis between the Smart Neural Cane and the traditional white cane under standardized conditions, ensuring fair performance assessment across identical navigation tasks. The study also aims to assess variability in user performance across repeated trials to evaluate system consistency and reliability.

Additionally, this work seeks to examine the human-device interaction dimension by analyzing how users adapt to artificial feedback signals and whether these signals improve confidence, reduce hesitation, and support smoother navigation behavior.

Ultimately, the study aims to contribute to the development of scalable, low-cost, and intelligent mobility aids that can bridge the gap between traditional assistive tools and modern AI-driven systems.

Materials and Methods

A controlled experimental study was conducted involving 20 participants with no prior experience using smart assistive devices. Each participant completed navigation tasks in a structured indoor environment containing standardized obstacle layouts.

To ensure experimental reliability, a within-subject design was used, where each participant performed identical navigation tasks using both the Smart Neural Cane and a traditional white cane. The order of device usage was randomized to minimize learning and fatigue effects.

The Smart Neural Cane integrates ultrasonic sensors for distance measurement and inertial sensors for motion tracking. Sensor data are processed in real time using a filtering algorithm to reduce noise and improve stability. A rule-based decision system

classifies obstacle proximity into multiple levels and triggers corresponding vibration and audio feedback.

Each participant completed 10 repeated trials per device, resulting in a total of 200 recorded navigation sessions. Performance metrics were automatically recorded, including detection accuracy, response time, collision frequency, and navigation completion efficiency.

Results

The Smart Neural Cane demonstrated consistently superior performance compared to the traditional white cane across all evaluated metrics.

The mean obstacle detection accuracy was 91.2% (± 3.8) for the Smart Neural Cane, compared to 64.5% (± 5.9) for the traditional cane, indicating a significant improvement of 26.7%.

The average response time decreased to 0.78 ± 0.12 seconds, compared to 1.52 ± 0.26 seconds for the traditional cane, demonstrating faster obstacle reaction capability.

Collision frequency was significantly reduced, with an average of 0.9 ± 0.5 collisions per trial for the Smart Neural Cane versus 3.4 ± 1.0 collisions per trial for the traditional cane.

User satisfaction ratings showed a marked improvement, with a mean score of 4.5/5, compared to 2.7/5 for the traditional cane.

Statistical analysis using paired t-tests confirmed that all observed differences were highly significant ($p < 0.001$). The effect size for detection accuracy was extremely large (Cohen's $d = 2.0$), indicating a strong practical impact. Additionally, low standard deviation values across repeated trials demonstrated high system stability and consistency.

Conclusion

The Smart Neural Cane presents a highly effective intelligent assistive system that significantly enhances mobility performance for visually impaired individuals compared to traditional white canes. The experimental results demonstrate consistent and statistically significant improvements across all evaluated performance metrics, including obstacle detection accuracy, response time, collision reduction, and user satisfaction.

The integration of ultrasonic sensing, motion tracking, and real-time feedback mechanisms proved effective in providing early environmental awareness and improving user decision-making during navigation. The system's ability to classify obstacle proximity and deliver adaptive feedback contributed to smoother and more confident movement behavior.

Beyond performance improvements, the study highlights the importance of reliable human–machine interaction in assistive technologies. Users adapted quickly to vibration and audio cues, indicating that multimodal feedback can effectively compensate for the absence of visual information and reduce cognitive load during navigation tasks.

Although the study was conducted under controlled indoor conditions, the high level of consistency across repeated trials suggests that the system is stable and robust. However, real-world environments introduce additional challenges such as dynamic obstacles, uneven terrain, and environmental noise, which may affect system performance. Therefore, future work should focus on outdoor validation and large-scale user testing to further confirm scalability and real-world applicability.

In conclusion, this work contributes to the advancement of intelligent assistive mobility systems by demonstrating that low-cost sensor integration combined with simple intelligent processing can produce substantial improvements over conventional assistive devices. The Smart Neural Cane represents a scalable foundation for future developments in AI-driven mobility assistance, with potential for further enhancement through machine learning integration, adaptive learning mechanisms, and advanced environmental mapping techniques.

Reference

1. Dakopoulos D., Bourbakis N. G. Intelligent wearable electronic travel aids for the blind // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 2010. Vol. 40, No. 1. P. 25–35.
2. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. Cambridge: MIT Press, 2016. 775 p.
3. World Health Organization. World report on vision. Geneva: World Health Organization, 2019. 180 p.
4. Zhang Y., Liu X., Wang J. Artificial intelligence in assistive technologies // Sensors. 2022. Vol. 22, No. 5. P. 1234–1250.

АЛГОРИТМІЧНІ ІННОВАЦІЇ: РОЛЬ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У СУЧАСНОМУ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Голуб Вероніка Максимівна

E-mail: veronikagolubwork@gmail.com

Козинська Євгенія Максимівна

E-mail: evgeniya.kosinskaya@gmail.com

Науковий керівник: Блажівська Ірина Петрівна

Штучний інтелект – це технологія, яка має за основу математичну модель автоматизації завдань, які потребують втручання людського інтелекту. Наприклад, аналіз, розпізнання мови, пошук, перевірка інформації або навіть навчання чомусь новому. Ідея того, що щось окрім мозку людини зможе виконувати роботу, потребуючу людського інтелекту, не нова, але вона стала досяжною завдяки математичному апарату. Різні вчені та письменники передбачали появу синтетичної думки, описуючи можливий вигляд таких машин у своїх творах і працях. Перші концепції мислення, які можна назвати штучним інтелектом, були досить незграбними, бо описати думку математикою на ранніх етапах вивчення комп'ютерних наук було майже неможливо. Але всі згадки таких технологій були поєднані однією системою поглядів, яка загалом і стала фундаментом штучного інтелекту.

За 200 з лишком років до виникнення першого комп'ютера людині вдалося вигадати машину, яка працює за схожим принципом комбінування елементів, що і сьогоденні ШІ. Роман Джонатана Свіфта «Мандри Гулівера» змальовував механізм, за допомогою якого вчені писали свої книги, позичали ідеї й складали філософські трактати. Вони натискали на важель, який запускав випадкове отримання дерев'яного блоку із словом. Саме це перемішування і є автоматизацією процесу вигадки нових ідей. Сучасні моделі штучного інтелекту обирають декілька джерел, із яких вибирають слова і перемішують їх. Як результат генерується текст, просто із запозичення слів й ідей. У 1914 році в Парижі іспанський інженер Леонардо Торрес створив фізичну модель схожої машини «El Ajedrecista» на принципах дискретної логіки. Розроблена для гри в шахи з людиною, але з нюансом: її метою було вигравати і попереджати про помилки чи шахрайства з боку супротивника. Науковець зробив один із перших кроків на шляху до появи штучного інтелекту.

Перша штучна нейронна мережа SNARC була створена в 1951 році двома винахідниками: Марвіном Мінським і Діном Едмундсом. Суть експерименту полягала в дослідженні навчання через імовірнісне підкріплення. Її назва містить ключове слово «стохастичний» (випадковий), що вказує на використання теорії ймовірностей для моделювання навчання. Машина мала імітувати щура у лабіринті, який методом проб і помилок навчився б знаходити правильні ходи й отримувати за це винагороду. Вона складалася з 3000 вакуумних трубок і мала 40 нейроподібних одиниць. За допомогою цієї праці наступні вчені «вчили» свої машини.

Термін штучний інтелект з'явився у 1955 році як ідея семінару «Пропозиція для Дартмутського літнього проєкту зі штучного інтелекту». Роком пізніше влітку захід ініціювали Джон Маккарті з Дартмутського коледжу, Марвін Мінскі з Гарвардського університету, Натаніель Рочестер з IBM і Клод Шеннон з Bell Telephone Laboratories. Цей період вважається офіційною датою створення штучного інтелекту.

Лінійна алгебра — фундамент штучного інтелекту, без якого алгоритми втратили б функціональність. Експерти IBM називають її мовою, що описує рух даних крізь моделі та процес навчання. На операціях лінійної алгебри базуються алгоритми машинного навчання та генеративні моделі, оскільки вони опрацьовують багатовимірні дані. У ШІ текст чи зображення стають векторами, матрицями та тензорами. Математичні об'єкти зберігають дані різних вимірів: будь-який вхідний сигнал перетворюється на масив чисел, який система обробляє через множення матриць, обчислення детермінантів чи обертання.

Розробники будують моделі ШІ на основі нейронних мереж. FreeCodeCamp визначає лінійну алгебру як основу для представлення даних та обчислень. Вона оптимізує роботу мереж, дозволяючи обробляти мільйони параметрів одночасно та прискорюючи навчання на великих наборах даних. Методи лінійної алгебри також відсікають шум, фокусуючи модель на ключових особливостях. На думку фахівців UnderstandTheMath, математична мова уможливлює маніпулювання даними високої розмірності. Лінійна алгебра заклала базу для роботи великих моделей, тому без неї ШІ не існував би.

Паралельно ймовірність і статистика вчать моделі діяти в умовах невизначеності. Теорія ймовірностей оцінює результати, що важливо для класифікації та аналізу ризиків. Ймовірнісні розподіли допомагають знаходити закономірності у мінливих даних, а статистика структурує інформацію: виявляє тенденції, обчислює середні значення та перевіряє значущість результатів. Регресійний аналіз встановлює залежності між змінними, а гіпотезне тестування допомагає оцінити точність прогнозів. Байєсівські методи незамінні за браку даних: вони поєднують попередній досвід із новими ймовірностями для ухвалення обґрунтованих рішень. Сучасні генеративні моделі використовують їх для оцінки впевненості у відповідях. Отже, ймовірність та статистика наділили ШІ здатністю розуміти світ і адаптуватися до змін, дозволяючи моделям прогнозувати події та ухвалювати рішення.

Список використаних джерел:

1. How Machine Learning Uses Linear Algebra. freeCodeCamp. 2023. URL: <https://www.freecodecamp.org/news/how-machine-learning-leverages-linear-algebra-to-optimize-model-trainingwhy-you-should-learn-the-fundamentals-of->

- linear-algebra/ (дата звернення: 19.04.2026).
2. Історія штучного інтелекту: цікаво про розвиток технології. Kyivstar Hub. 2024. URL: <https://hub.kyivstar.ua/articles/istoriya-shtuchnogo-intelektu-czikavo-pro-rozvitok-tehnologiyi-chastina-1> (дата звернення: 19.04.2026).
 3. Linear Algebra Chapter. Dive into Deep Learning. 2024. URL: https://d2l.ai/chapter_preliminaries/linear-algebra.html (дата звернення: 19.04.2026).
 4. Linear Algebra For Data Science. Analytics Vidhya. 2023. URL: <https://medium.com/analytics-vidhya/linear-algebra-for-data-science-part-1-basic-concepts-1b8379ee834d> (дата звернення: 19.04.2026).
 5. Mathematics of the AI Age: How Classical Theories Shape the IT World. NT.ua Blog. 2024. URL: <https://nt.ua/blog/mathematics-of-the-ai-age-how-classical-theories-shape-the-it-world> (дата звернення: 19.04.2026).
 6. What Is Linear Algebra for Machine Learning? IBM Topics. 2024. URL: <https://www.ibm.com/think/topics/linear-algebra-for-machine-learning> (дата звернення: 19.04.2026).

ВЕБ-ДОДАТОК ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНОЗЕМНИХ СЛІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ТЕХНОЛОГІЙ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Цугуй А.В.

E-mail: tsuhui.andrei@chnu.edu.ua

Науковий керівник: Данилюк І.М.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В умовах глобалізації та зростаючої інтенсивності міжнародних комунікацій знання іноземних мов стає все більш затребуваною компетентністю. Особливу роль у процесі оволодіння мовою відіграє формування лексичного запасу: без достатнього словникового фонду навіть базове спілкування залишається ускладненим. Традиційні методи роботи з лексикою – паперові картки, словники, ручні записи – поступово витісняються цифровими рішеннями, що забезпечують вищий рівень інтерактивності й персоналізації. Водночас більшість наявних застосунків не враховують контекст, у якому користувач зустрів нове слово, тоді як саме контекстуальне засвоєння є одним із найефективніших підходів у сучасній лінгводидактиці. З огляду на це, метою цієї роботи є проєктування та розробка веб-додатку LingoZitro – платформи для інтерактивного вивчення іноземної лексики, що поєднує роботу з власними текстовими матеріалами, систему персоналізованих карток і модуль генерації навчального контенту на основі штучного інтелекту.

В основу системи покладено клієнт-серверну архітектуру, розроблену з акцентом на зручність, швидкодію та масштабованість. Клієнтську частину реалізовано з використанням бібліотеки React [1] у поєднанні з інструментом збірки Vite, що забезпечило компонентний підхід до організації інтерфейсу та високу продуктивність рендерингу на стороні браузера. Для стилізації застосовано Tailwind CSS [2], який дозволив гнучко й оперативно налаштовувати зовнішній вигляд компонентів без написання громіздких таблиць стилів. Серверну частину побудовано на мові Python [3] із використанням Django REST Framework [4], що надало зручні засоби для реалізації RESTful API, управління бізнес-логікою та інтеграції із зовнішніми моделями штучного інтелекту. Для контейнеризації та відтворюваного розгортання середовища використано Docker, а документацію до API сформовано засобами Swagger.

Функціональні можливості LingoZitro охоплюють повний цикл роботи користувача з іноземною лексикою. Після реєстрації та автентифікації користувач отримує доступ до особистої бібліотеки, де може зберігати власні книги й текстові матеріали. Під час читання будь-яке незнайоме слово можна виділити та зберегти безпосередньо з контексту – таким чином лексика накопичується органічно, без переривання процесу читання. Збережені слова групуються у персональні колоди для подальшої систематизації та повторення. Додатково реалізовано механізм відстеження щоденних навчальних цілей і статистику послідовних днів занять, що формує стійку звичку до регулярного навчання та підтримує мотивацію користувача.

Ключовою інноваційною складовою проєкту є модуль автоматичної генерації навчального контенту із залученням штучного інтелекту. Традиційно створення картки для нового слова вимагає від користувача самостійного пошуку перекладу, підбору прикладів вживання та формулювання визначення, що є трудомістким процесом і знижує темп роботи. У LingoZitro цей процес автоматизовано: система передає вибране слово разом із його оригінальним контекстом у книзі до моделі штучного інтелекту, яка генерує розгорнутий опис, точний переклад та декілька доречних прикладів уживання. Це суттєво скорочує час на підготовку навчального матеріалу і дозволяє користувачеві зосередитися безпосередньо на засвоєнні лексики.

Практична цінність розробленого додатку полягає у комплексному підході: LingoZitro об'єднує перевірені методики роботи зі словниковими картками та читанням автентичних текстів із сучасними можливостями штучного інтелекту. Результатом стало повноцінне персоналізоване цифрове середовище, у якому користувач вивчає лексику не ізольовано, а у живому

мовному контексті. Подальший розвиток проєкту передбачає розширення підтримуваних мов та додавання мовних вправ на основі накопиченого словника.

Список використаних джерел:

1. React: офіційний вебсайт. URL: <https://react.dev/> (дата звернення: 02.04.2026).
2. Tailwind CSS: офіційний вебсайт. URL: <https://tailwindcss.com/> (дата звернення: 02.04.2026).
3. Python: офіційний вебсайт. URL: <https://www.python.org/> (дата звернення: 02.04.2026).
4. Django REST Framework: офіційний вебсайт. URL: <https://www.django-rest-framework.org/> (дата звернення: 02.04.2026).

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ САМОНАВЧАННЯ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦІЇ СЕГМЕНТАЦІЇ ПОШКОДЖЕНЬ НЕСТАНДАРТНИХ ВАНТАЖІВ

Головко М. А.

Науковий керівник: Панченко А. С.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

АНОТАЦІЯ

У роботі досліджено застосування підходів самонавчання (Self-Supervised Learning) для вирішення задачі попиксельного виділення дефектів на зображеннях нестандартних вантажів. Розглянуто проблему дефіциту розмічених даних у логістичних системах та запропоновано метод попереднього навчання моделей на сирих масивах даних для підвищення точності локалізації пошкоджень.

Ключові слова: комп'ютерний зір, семантична сегментація, самонавчання, дефектоскопія, глибоке навчання, логістика.

ВСТУП

Автоматизація контролю цілісності вантажів на етапах транспортування та складського зберігання є критично важливим завданням для сучасних логістичних центрів. Особливу складність становлять нестандартні вантажі, форма та зовнішній вигляд яких значно варіюються. Традиційні методи навчання з учителем вимагають великої кількості анотованих зображень, що є складним завданням в умовах постійної зміни асортименту товарів[2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою дослідження є розробка алгоритму сегментації, здатного ідентифікувати пошкодження з високою точністю (вм'ятини, розриви упаковки, відколи), використовуючи мінімальну кількість ручної розмітки. Основна гіпотеза полягає в тому, що використання методів самонавчання дозволить моделі вивчити універсальні ознаки візуальних структур вантажів із нерозмічених масивів даних.

МЕТОДОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі запропоновано двоетапний підхід:

1. **Попереднє навчання** - використання архітектури маскованих автоенкодерів на великій кількості нерозмічених фотографій, отриманих із камер конвеєрних ліній. Модель навчається відновлювати приховані ділянки зображень, формуючи розуміння геометрії та текстури об'єктів[1].
2. **Тонке налаштування** - донавчання моделі на малій вибірці розмічених даних для виконання безпосередньої задачі сегментації[3].

Для оптимізації процесу навчання використовується комбінована функція втрат L_{total} , що поєднує бінарну крос-ентропію (BCE) та функцію Дайса (Dice Loss). Це дозволяє моделі ефективно працювати в умовах нерівномірного розподілу класів, коли площа дефекту значно менша за площу фону:

$$L_{total} = \alpha L_{BCE} + \beta L_{Dice}$$

де:

L_{BCE} — мінімізує похибку на рівні окремих пікселів;

L_{Dice} — відповідає за максимальний збіг між передбаченою областю та еталоном;

α , β — вагові коефіцієнти; ϵ — параметр згладжування для стабільності обчислень.

РЕЗУЛЬТАТИ

Для перевірки ефективності запропонованого підходу було проведено серію експериментів на базі архітектури Vision Transformer[5]. Процес дослідження був організований наступним чином:

- **Налаштування навчання:** Попереднє самонавчання моделі проводилося на вибірці з 1000 нерозмічених зображень, що містили фотографії нестандартних вантажів у різних складських умовах. Використовувалася стратегія маскування 75% випадкових патчів зображення. На етапі тонкого налаштування застосовувався оптимізатор AdamW із початковою швидкістю навчання 10^{-4} та розміром пакету 16[4].
- **Експериментальне порівняння:** Проведено порівняльний аналіз між класичним навчанням «з учителем» та запропонованим методом із попереднім самонавчанням. Оцінка проводилася за метрикою середнього перетину над об'єднанням (mIoU)[4].

- Аналіз результатів: Встановлено, що при використанні лише 100 розмічених зображень (10% від загального масиву), модель із самонавчанням продемонструвала показник mIoU на рівні 0.74. У той же час модель, навчена за стандартною схемою на тій же кількості даних, досягла лише 0.42, що супроводжувалося значним перенавчанням та нездатністю до точної локалізації дрібних дефектів[5].

Експериментально доведено, що навіть за наявності невеликої бази даних у 1000 зображень, етап самонавчання дозволяє нейромережі виділити інваріантні ознаки об'єктів. Це дозволяє системі стабільно ідентифікувати пошкодження навіть за умов складного фону та змінного освітлення, що є критично важливим для практичного розгортання в логістичних терміналах.

ВИСНОВКИ

У ході дослідження було доведено ефективність підходу самонавчання для ідентифікації дефектів нестандартних вантажів. Отримані результати продемонстрували, що використання маскованих автоенкодерів дозволяє досягти показника mIoU 0.74 при використанні лише 10% розмічених даних.

Це підтверджує, що модель здатна успішно виділяти інваріантні ознаки об'єктів навіть на обмеженій вибірці у 1000 зображень, демонструючи високу стійкість до змінного освітлення та складного фону складських приміщень. Запропонований метод дозволяє скоротити витрати на підготовку даних у кілька разів, що є ключовим фактором для впровадження систем інтелектуального зору в реальні логістичні процеси та автоматизовані системи обліку [1, 3].

Список використаних джерел:

1. He K., Chen X., Xie S. [et al.]. Masked Autoencoders Are Scalable Vision Learners. Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2022. P. 16000–16009.
2. Jaiswal A., Babu A. R., Zadeh M. Z. [et al.]. A Survey on Contrastive Self-Supervised Learning. Technologies. 2021. Vol. 9, no. 1. P. 2.
3. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation. Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI). 2015. Vol. 9351. P. 234–241.
4. Strudel R., Garcia R., Laptev I., Schmid C. Segmenter: Transformer-for Semantic Segmentation. Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). 2021. P. 7262–7272.
5. Dosovitskiy A., Beyer L., Kolesnikov A. [et al.]. An Image is Worth 16x16 Words: Transformers for Image Recognition at Scale. International Conference on Learning Representations (ICLR). 2021.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМУ CAUSAL FOREST ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ УМОВНОГО СЕРЕДНЬОГО ЕФЕКТУ ВПЛИВУ НА ОСНОВІ СИНТЕТИЧНИХ ДАНИХ

Бабіля Р. В.

E-mail: ruslan.babilia@lnu.edu.ua

Науковий керівник: Білецький В. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Задачі причинно-наслідкового аналізу (Causal Inference) останнім часом набувають великої популярності в різних сферах – від доказової медицини до персоналізованого маркетингу та економетрики. Ключовим поняттям у цій області є оцінювання умовного середнього ефекту впливу (CATE – Conditional Average Treatment Effect), яке дозволяє визначати індивідуальні реакції об’єктів на певне втручання або лікування залежно від їх характеристик. Застосування методів машинного навчання, зокрема алгоритму причинно-наслідкових лісів (Causal Forest) [1, 4], дозволяє ефективно моделювати нелінійні залежності у багатовимірних просторах.

Мета роботи полягає у дослідженні якості роботи алгоритму Causal Forest при різних обсягах вибірок та рівнях перекриття (overlap) між контрольною та цільовою групами за допомогою розробленого симуляційного середовища.

В основі оцінки ефекту лежить потенційна модель результатів Рубіна. Нехай для кожного об’єкта ми маємо вектор ознак $X \in R^p$, бінарний індикатор впливу $W \in \{0,1\}$ та відгук Y . Тоді CATE можна визначити за формулою 1:

$$\tau(x) = E[Y(1) - Y(0) | X = x] \quad (1)$$

де $Y(1)$ та $Y(0)$ – потенційні результати при наявності та відсутності втручання відповідно.

Для оцінки CATE за допомогою алгоритму Causal Forest будують ансамбль дерев рішень, які розбивають простір ознак так, щоб максимізувати неоднорідність ефекту між листками [4]. Проте на практиці робота алгоритмів сильно залежить від властивостей наявних спостережуваних даних, зокрема від обсягу вибірки та балансу схильностей до втручання в різних підгрупах (перекриття).

Для системного тестування моделей нами розроблено набір симуляційних R-скриптів, що дозволяють генерувати синтетичні дані з відомими “істинними” значеннями CATE згідно із методом Set-up A з роботи Nie, Wager (2021) [3]. Це дозволяє безпосередньо вимірювати похибку моделювання, використовуючи формулу 2 для метрики PEHE (Precision in Estimation of Heterogeneous Effects):

$$PEHE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\tau}(x_i) - \tau(x_i))^2} \quad (2)$$

де $\tau(x_i)$ – істинний ефект впливу для i -го спостереження, заданий параметрами симуляції, а $\hat{\tau}(x_i)$ – оцінка (прогноз) ефекту впливу, отримана за допомогою алгоритму Causal Forest.

В рамках дослідження проведено експерименти з генерацією вибірок різних обсягів: $N \in \{500, 1000, 2000, 4000, 8000\}$. Оцінювання алгоритмів проводилося для моделі Causal Forest [2]. Також генерувалися датасети з трьома рівнями перекриття (ймовірності отримання впливу): Strong (~73%), Medium (~88%) та Weak (~98%). Слабке екстримальне перекриття (Weak) моделює ситуацію, коли групи об'єктів, що отримали та не отримали вплив, суттєво відрізняються своїми властивостями, що часто зустрічається в обсерваційних дослідженнях. У симуляційних експериментах використовувалось 10 ознак ($p = 10$). Для кожного сценарію проведено 50 симуляцій.

Як видно з розподілу метрики PEHE (рис. 1), алгоритм Causal Forest демонструє суттєво меншу дисперсію помилки при сильному (Strong) перекритті незалежно від обсягу вибірки. У випадках слабого (Weak) перекриття дисперсія та середнє значення помилки зростають, особливо для малих вибірок.

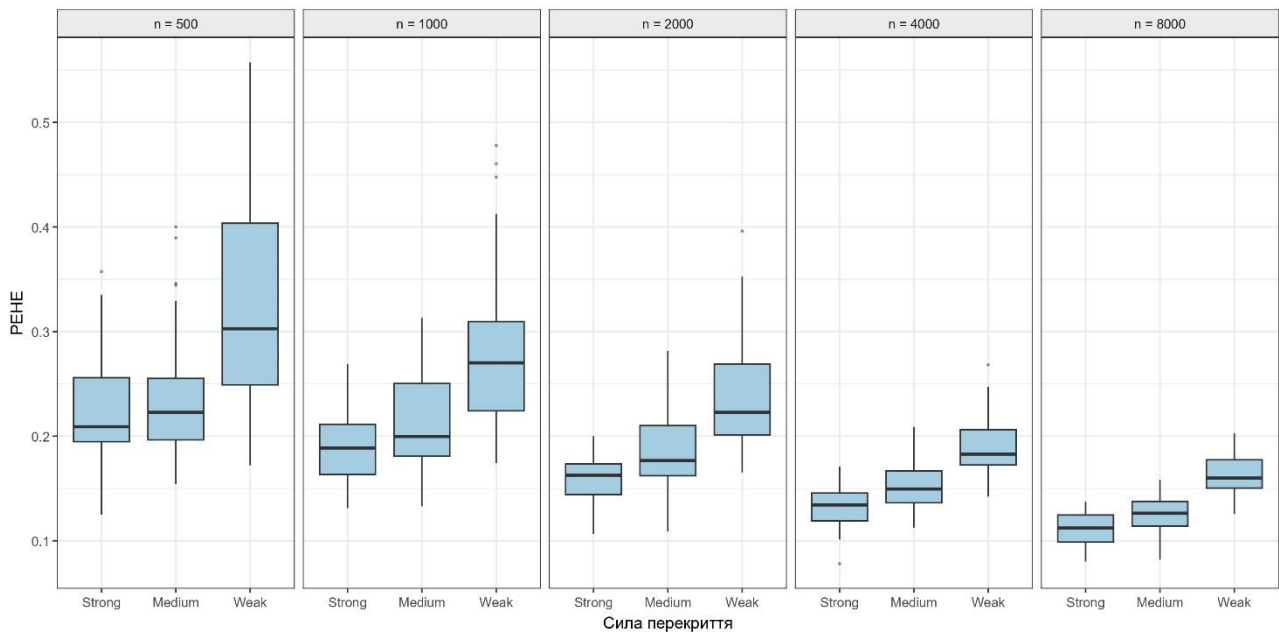


Рис. 1: Розподіл метрики PEHE за обсягом вибірки та режимом перекриття (по 50 симуляцій для кожного сценарію)

Аналіз динаміки середнього значення PEHE (рис. 2) підтверджує, що зі збільшенням розміру вибірки ($N \geq 4000$) похибка стрімко зменшується для всіх режимів перекриття, наближаючись до спільних асимптотичних значень, проте

для слабкого перекриття вона все одно залишається вищою.режимів перекриття, наближаючись до спільних асимптотичних значень, проте для слабкого перекриття вона все одно залишається вищою.

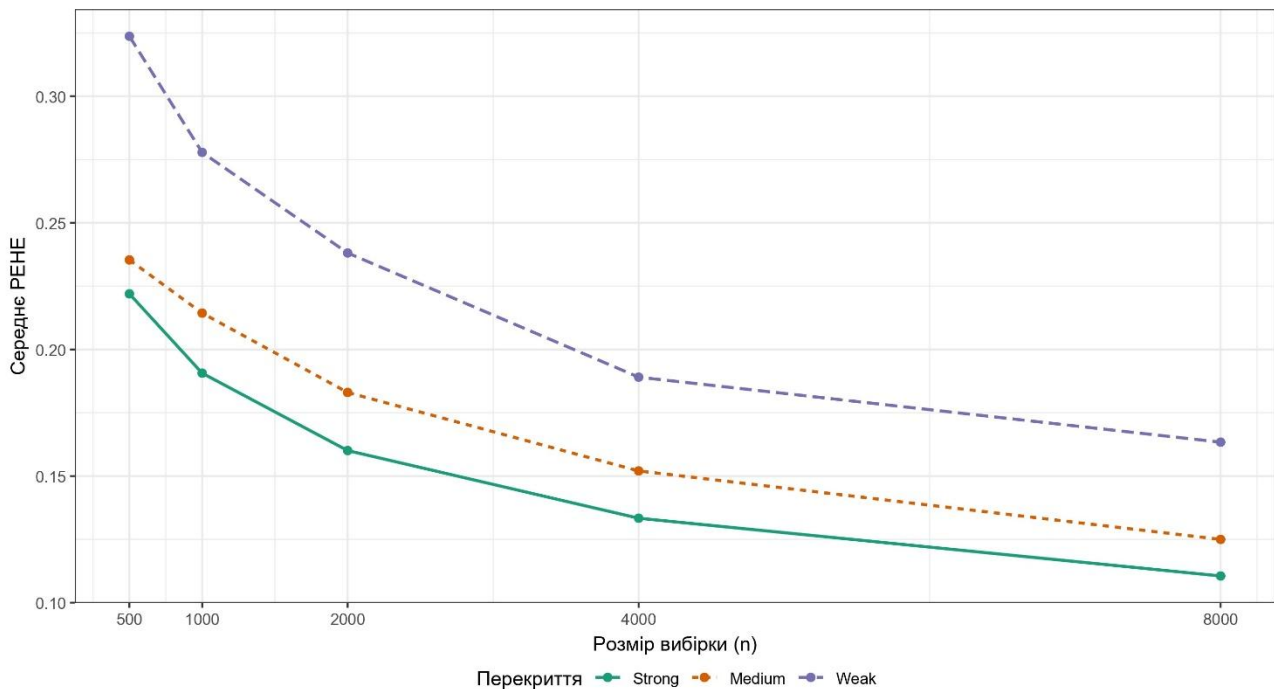


Рис. 2: Динаміка середнього значення PENE залежно від розміру вибірки та перекриття

У випадках слабкого перекриття моделі доводиться екстраполювати результати на ділянки простору ознак, де бракує спостережень з альтернативним статусом втручання. Для наглядного аналізу зведено усереднені значення PENE у відповідній таблиці (табл. 1).

Таблиця 1: Усереднені значення PENE при різних рівнях перекриття для Causal Forest

Розмір вибірки (N)	Strong Overlap	Medium Overlap	Weak Overlap
500	0.222	0.235	0.324
1000	0.191	0.214	0.278
2000	0.160	0.183	0.238
4000	0.133	0.152	0.189
8000	0.111	0.125	0.163

Висновки. Розроблене симуляційне середовище дозволило провести комплексну перевірку алгоритму оцінювання CATE в контрольованих умовах із різним обсягом даних та ступенем перекриття. Аналіз результатів алгоритму Causal Forest вказав на суттєву залежність якості прогнозування CATE не тільки від кількості даних, але й, що більш критично, від збалансованості об'єктів для навчання (рівня перекриття). При малих обсягах вибірок ($N \leq 1000$)

екстримальне мале перекриття критично збільшує помилку та її дисперсію, тоді як при значних обсягах ($N \geq 4000$) Causal Forest здатний частково пом'якшити цей вплив, суттєво зменшуючи похибку та підвищуючи стабільність оцінок, хоча розрив у точності між слабким і сильним перекриттям залишається помітним.

Список використаних джерел:

1. Athey S., Tibshirani J., Wager S. Generalized random forests. The Annals of Statistics. 2019. Vol. 47, No. 2. P. 1148–1178.
2. grf: Generalized Random Forests (Beta). R package version 0.10.2 / Tibshirani J., Athey S., Friedberg R. et al. 2018. URL: <https://github.com/grf-labs/grf> (дата звернення: 13.04.2026).
3. Nie X., Wager S. Quasi-oracle estimation of heterogeneous treatment effects. Biometrika. 2021. Vol. 108, No. 2. P. 299–319.
4. Wager S., Athey S. Estimation and inference of heterogeneous treatment effects using random forests. Journal of the American Statistical Association. 2018. Vol. 113, No. 523. P. 1228–1242.

ІНТЕРАКТИВНА ПАНЕЛЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТА МОНІТОРИНГУ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНОЇ СИТУАЦІЇ

Мінаков А.А.

E-mail: a.a.minakov@student.khai.edu

Науковий керівник: Базілевич К.О., к. т. н., доцент

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»

Своєчасний моніторинг епідеміологічної ситуації є важливим завданням системи громадського здоров'я, оскільки дає змогу відстежувати зміни показників захворюваності, виявляти регіональні особливості поширення хвороб і підтримувати прийняття обґрунтованих управлінських рішень. Водночас подання статистичних даних лише у вигляді таблиць і текстових звітів ускладнює їх швидке сприйняття, порівняння та подальший аналіз. Тому використання інтерактивних панелей є доцільним підходом для поєднання в одному середовищі картографічної візуалізації, числових індикаторів, графіків динаміки та засобів фільтрації [1, 4].

Метою роботи є розробка інтерактивної панелі для моніторингу епідеміологічної ситуації в Україні на основі реальних статистичних даних про інфекційну захворюваність. У межах дослідження використано відкриті дані щодо ГРВІ, грипу, гепатитів А, В і С, гострих кишкових інфекцій та сальмонельозу, а також допоміжні демографічні та картографічні дані для

розрахунку інтенсивних показників на 100 тис. населення і відображення регіонів України [5]. Під час підготовки даних було виконано їх очищення, узгодження назв регіонів, агрегацію за часовими періодами та розрахунок інтенсивних показників на 100 тис. населення.

Під час проєктування системи було враховано вимоги до наочності, зручності користування та цілісності подання результатів. Розроблена інтерактивна панель забезпечує фільтрацію за типом захворювання та періодом, інтерактивне відображення даних на карті України [3], показ ключових індикаторів у KPI-картках, перегляд деталізованої інформації для вибраного регіону, побудову графіків динаміки та формування таблиці деталізованих показників. Окремо реалізовано режим порівняння регіонів, що дає змогу зіставляти значення між областями та виявляти відмінності у просторовому розподілі захворюваності.

Важливою складовою розробленої системи є прогностичний модуль, який дозволяє оцінювати очікувані значення показників захворюваності на наступний період. У системі відображаються не лише прогностичні значення, а й діапазони невизначеності, що підвищує інформативність результатів. Для оцінювання якості прогнозу використано метрики MAE, RMSE та MAPE, які дають змогу контролювати точність отриманих результатів і практичну придатність моделі для короткострокового прогнозування [2].

У результаті виконаної роботи розроблено прототип панелі, яка поєднує аналітичний, візуалізаційний і прогностичний функціонал. Система забезпечує швидке отримання узагальненої картини епідеміологічної ситуації, перехід до деталізованого аналізу окремого регіону, порівняння територій між собою та виявлення тенденцій поширення інфекційних захворювань. Практична цінність розробки полягає у можливості використання системи як демонстраційного та аналітичного інструменту для роботи зі статистичними даними у сфері громадського здоров'я. Окремою перевагою запропонованого підходу є поєднання у межах одного веб-інтерфейсу фактичних статистичних даних, засобів їх регіонального порівняння та короткострокового прогнозування. Це дає змогу використовувати розроблену систему як інструмент підтримки аналітичних рішень під час оцінювання поточної епідеміологічної ситуації та виявлення тенденцій її зміни.

Подальший розвиток системи може бути пов'язаний із розширенням переліку джерел даних, удосконаленням прогностичного модуля, додаванням автоматизованого оновлення статистики та розширенням набору аналітичних сценаріїв для глибшого порівняння регіонів і типів захворювань.

Список використаних джерел:

1. European Centre for Disease Prevention and Control. Surveillance Atlas of Infectious Diseases. URL: <https://www.ecdc.europa.eu/en/surveillance-atlas-infectious-diseases> (дата звернення: 15.04.2026).
2. Hyndman R. J., Koehler A. B. Another look at measures of forecast accuracy. International Journal of Forecasting. 2006. Vol. 22, No. 4. P. 679-688. URL: <https://robjhyndman.com/papers/mase.pdf> (дата звернення: 15.04.2026).
3. Leaflet. API reference. URL: <https://leafletjs.com/reference.html> (дата звернення: 15.04.2026).
4. World Health Organization. Dashboards - WHO Data. URL: <https://data.who.int/dashboards/dashboards> (дата звернення: 15.04.2026).
5. Центр громадського здоров'я України. Інфекційна захворюваність населення України. URL: <https://phc.org.ua/kontrol-zakhvoryuvan/inshi-infekciyni-zakhvoryuvannya/infekciyna-zakhvoryuvanist-naselennya-ukraini> (дата звернення: 15.04.2026).

ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА АНАЛІЗУ ВПЛИВУ ДЕМОГРАФІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ФАКТОРІВ НА ІНФЕКЦІЙНУ ЗАХВОРЮВАНІСТЬ

Пилипенко К.А.

E-mail: k.a.pylypenko@student.khai.edu

Науковий керівник: Базілевич К.О., к. т. н., доцент

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»

Інфекційна захворюваність на регіональному рівні формується під впливом не лише медичних, а й демографічних, соціально-економічних, поведінкових та організаційних чинників. За таких умов простий опис статистичних даних не дає змоги виявити зв'язки між рівнем захворюваності та особливостями регіону. Це зумовлює потребу у створенні інформаційної системи, призначеної для аналізу підготовленого набору регіональних статистичних даних, виявлення зв'язків між факторами та захворюваністю і представлення результатів у зручному аналітичному вигляді. Метою роботи є розробка та реалізація інформаційної системи для аналізу регіональної інфекційної захворюваності та виявлення зв'язків між рівнем захворюваності і різними групами факторів. У центрі дослідження перебувають три нозологічні форми – туберкульоз, ВІЛ-інфекція та сифіліс. Їх вибір зумовлений доступністю офіційних регіональних даних та епідеміологічною значущістю. Додатково враховано, що захворюваність на ВІЛ доцільно розглядати не лише як окрему цільову змінну, а й як супутній епідеміологічний фактор у моделях туберкульозу.

Інформаційну основу дослідження становлять відкриті дані Центру громадського здоров'я України, Державної служби статистики України та порталу data.gov.ua, на основі яких було сформовано єдиний аналітичний набір для подальшого використання в системі [1, 2, 5]. До факторного опису регіонів включено кілька змістовних груп показників. Демографічний блок відображає масштаб, структуру та мобільність населення; соціально-економічний – рівень матеріального забезпечення та соціальної вразливості; медичний – ресурсну забезпеченість системи охорони здоров'я; епідеміологічний – інтенсивність виявлення, обстеження та супроводу випадків; поведінковий і наркологічний – поширеність супутніх ризиків; екологічний – загальне техногенне навантаження середовища. Такий підхід дозволяє розглядати інфекційну захворюваність як багатофакторне явище, у якому поєднуються зовнішні детермінанти, характеристики медичної системи та особливості виявлення хвороб. Інтерфейс системи забезпечує перегляд узагальнених регіональних показників, просторову візуалізацію кластерів ризику та порівняння захворюваності між регіонами. Однією з можливостей системи є поєднання коротких статистичних підсумків, карти кластерів для вибраної форми нозології та діаграм регіонального розподілу показників, що спрощує первинний огляд даних і порівняння територій. У межах інформаційної системи реалізовано кілька взаємопов'язаних аналітичних модулів. Кореляційний аналіз використовується для первинного виявлення статистичних асоціацій між факторами та показниками захворюваності [3]. Множинна лінійна регресія дає змогу кількісно оцінити внесок окремих предикторів за умови фіксованого впливу інших змінних. Метод Lasso застосовується як інструмент автоматичного відбору найбільш інформативних ознак у ситуації, коли початковий набір містить взаємопов'язані або надлишкові фактори. Random Forest використовується для моделювання складніших, у тому числі нелінійних, залежностей та оцінювання важливості ознак [4]. Практична цінність розробленої системи полягає в тому, що вона забезпечує статистичний аналіз, машинне навчання та візуалізацію результатів на основі попередньо підготовленого набору регіональних даних. Це дозволяє користувачеві переглядати регіональні показники, інтерпретувати взаємозв'язки між факторами та захворюваністю, порівнювати результати різних методів і виділяти найбільш інформативні змінні для окремих нозологій.

Подальший розвиток роботи доцільно пов'язати з розширенням часових меж, включенням нових груп факторів, удосконаленням прогностичних модулів і розвитком засобів підтримки аналітичних рішень у сфері громадського здоров'я.

Список використаних джерел:

1. data.gov.ua : Єдиний державний вебпортал відкритих даних. URL: <https://data.gov.ua/> (дата звернення: 15.04.2026).
2. Державна служба статистики України : офіційний. URL: <https://www.ukrstat.gov.ua/> (дата звернення: 15.04.2026).
3. Кореляційний аналіз. Wiki ТНТУ. URL: https://wiki.tntu.edu.ua/Кореляційний_аналіз (дата звернення: 15.04.2026).
4. Практичний посібник з методу Random Forest для підприємництва. LinkedIn. URL: <https://ua.linkedin.com/pulse/practical-guide-random-forests-enterprise-vasu-rao-bjnyc?tl=uk> (дата звернення: 15.04.2026).
5. Центр громадського здоров'я України | МОЗ. URL: <https://phc.org.ua/> (дата звернення: 15.04.2026).

КЛАСИФІКАЦІЯ ЧАСТКОВО ВИДИМИХ ОБ'ЄКТІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Лугових Д.Ю.

E-mail: luhovykh2020ks13@student.karazin.ua

Панченко А.С.

E-mail: artem.panchenko@karazin.ua

Науковий керівник: Панченко А.С.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Класифікація – одна з базових задач комп'ютерного зору, що визначає клас зображення або об'єкта, не враховуючи їхнє розташування чи кількість. Натомість розпізнавання об'єктів є складнішою задачею, яка поєднує класифікацію та локалізацію. Відмінності підходів показано на рис. 1.

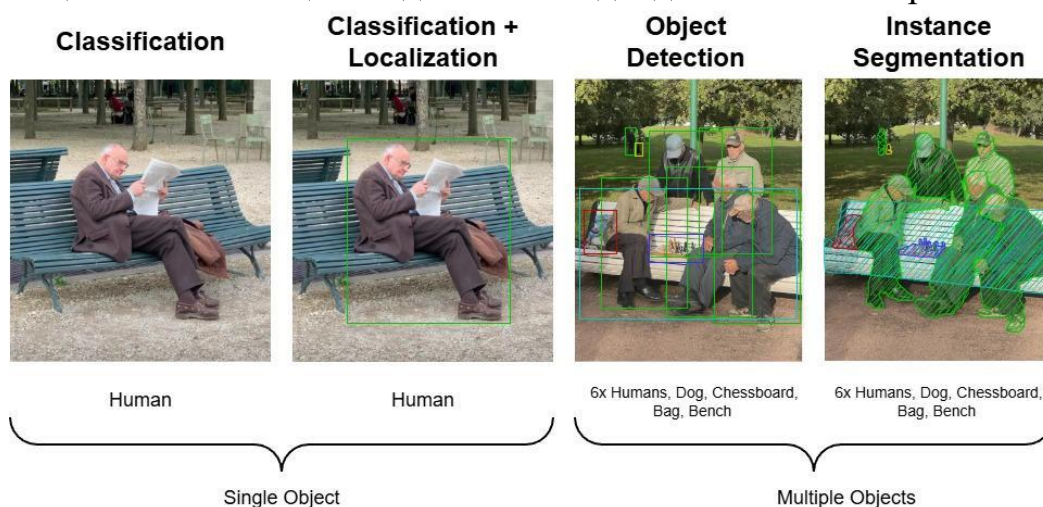


Рис. 1: Відмінність підходів комп'ютерного зору

Цей підхід не лише визначає, які об'єкти є на зображенні, а й встановлює їхнє точне розташування (eng. bounding boxes). Якщо класифікація відповідає на

питання «що зображено?», то розпізнавання – «що і де саме?». Ключова різниця полягає в рівні деталізації: класифікація передбачає достатню представленість об’єкта, тоді як розпізнавання використовує локальні ознаки, дозволяючи працювати з кількома об’єктами та їхнім просторовим розташуванням. Це особливо важливо для частково видимих об’єктів, де класифікація може помилятися через неповну інформацію, а розпізнавання – ефективніше завдяки фокусуванню на видимих частинах.

Зазвичай технології, які націлені на розпізнавання об’єктів, мають різні механізми для боротьби з оклюзивними даними. Однак варто зауважити, що категоризація різних архітектур для виконання цієї задачі залежить від підходу, що дозволяє підібрати її відповідно до потреб, та має три групи зображені на рис 2.

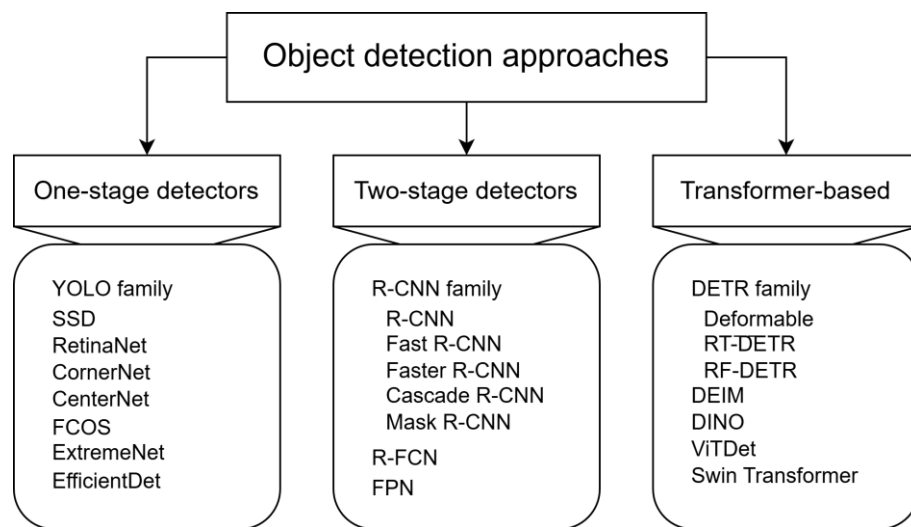


Рис. 2: Підходи до вирішення задачі розпізнавання об’єктів

Новизна роботи полягає в тому, що більшість підходів лише частково вирішують проблему, балансує між точністю розпізнавання та обробкою перекритих об’єктів. У роботі розглянуто 5 сучасних архітектур (YOLO 12/13, RT-DETRv2, DEIMv2, SSD), які поєднують ефективне розпізнавання з механізмами боротьби з оклюзіями. Для оцінювання використано датасети COCO (для загальної якості та стабільності) і CrowdHuman (для перевірки роботи в умовах оклюзій). Через відсутність анотацій у тестовому наборі застосовано автоанотацію на основі YOLO 13x та SAM 2.1 large, що є достатнім для коректного порівняння архітектур.

Отримання результатів будуть відбуватися за двома ключовими формулами або ж метриками, які наявні в усіх без винятку дослідженнях пов’язаних з розпізнаванням об’єктів – mean Average Precision $mAP = \frac{\sum_{n=1}^N AP(n)}{N}$ та mean Average Recall (mAR) $mAR = \frac{\sum_{n=1}^N AR(n)}{N}$. AP та AR розраховуються як площа під кривою precision-recall $AP = \int_0^1 p(r)dr$ та $AR =$

$\int_0^1 r(p)dp$ відповідно. Також зазвичай вони включають наступні відомості, які б більш детально змогли б описати дані: поріг перетину з визначеною границей $IoU(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$, розмір об'єктів (Area) та максимальна кількість передбачень на одне зображення (maxDets).

Аналізуючи результати отримані на валідаційному можна виділити повну домінацію саме YOLO 12, враховуючи, що YOLO 13 на бібліотеці ultralytics робилися ентузіастами, то її результати доволі близькі до попередньої версії. Тестовий набір також показав повну домінацію YOLO сімейства, що узгоджується з офіційними дослідженнями проведеними на цих архітектурах. Однак результати на перекритих об'єктах показали себе зовсім іншим чином, результати можна переглянути у рис. 3.

OCCLUDED								
Metric	IoU	Area	maxDets	Models				
				YOLO12 (imsize=700x700,bs=16)	YOLO13 (imsize=700x700,bs=16)	SSD (imsize=300x300,bs=1)	RT-DETRv2 (imsize=700x700,bs=1)	DEIMv2 (imsize=640x640,bs=1)
mean Average Precision (mAP)	0.50:0.95	all	100	0.202	0.195	0.107	0.166	0.205
mean Average Precision (mAP)	0.5	all	100	0.452	0.436	0.313	0.411	0.450
mean Average Precision (mAP)	0.75	all	100	0.121	0.155	0.052	0.115	0.164
mean Average Precision (mAP)	0.50:0.95	small	100	0.323	0.317	0.174	0.261	0.321
mean Average Precision (mAP)	0.50:0.95	medium	100	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
mean Average Precision (mAP)	0.50:0.95	large	100	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
mean Average Recall (mAR)	0.50:0.95	all	1	0.026	0.025	0.020	0.025	0.027
mean Average Recall (mAR)	0.50:0.95	all	10	0.191	0.187	0.118	0.166	0.193
mean Average Recall (mAR)	0.50:0.95	all	100	0.346	0.342	0.184	0.285	0.347
mean Average Recall (mAR)	0.50:0.95	small	100	0.346	0.342	0.184	0.285	0.347
mean Average Recall (mAR)	0.50:0.95	medium	100	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
mean Average Recall (mAR)	0.50:0.95	large	100	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
mean Average Recall (mAR)	0.5	all	100	0.651	0.645	0.471	0.603	0.652
mean Average Recall (mAR)	0.75	all	100	0.320	0.314	0.120	0.236	0.319

Рис. 3: Оцінювання роботи архітектур з оклюзивними даними

Результати на CrowdHuman показують, що оклюзія суттєво ускладнює детекцію: всі моделі мають низькі mAP і mAR, особливо при IoU = 0.75, що свідчить про проблеми з точною локалізацією. Найкращі показники mAP@0.50:0.95 частково демонструє YOLO 12, але загалом переважає DEIMv2, тоді як SSD є найменш ефективною. Значення mAR залишаються низькими навіть при maxDets=100, що вказує на велику кількість пропущених об'єктів у щільних сценах. Це підтверджує обмежену ефективність сучасних підходів в умовах оклюзії та необхідність спеціалізованих методів для покращення локалізації й урахування контексту.

Список використаних джерел:

1. Information retrieval, Wikipedia, 2017. URL: <https://shorturl.at/FwMcK> (дата

- звернення: 01.04.2026).
2. Mengqi L., Siqu L., Yihong W., Han H., You Z., Xihu Z., Guiguang D., Shaoyi D., Zongze W., Yue G. YOLOv13: Real-Time Object Detection with Hypergraph-Enhanced Adaptive Visual Perception, 2025. URL: <https://arxiv.org/pdf/2506.17733> (дата звернення: 25.03.2026).
 3. Object Detection vs. Classification in Computer Vision: Explained URL: <https://shorturl.at/Jy7mg> (дата звернення: 16.04.2026).
 4. Shao S., Zhao Z., Li B., Xiao T., Yu G., Zhang X., Sun J. CrowdHuman: A Benchmark for Detecting Human in a Crowd, 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1805.00123> (дата звернення: 16.04.2026).
 5. Shihua H., Yongjie H., Longfei L., Xuanlong Y., Xi S. Real-Time Object Detection Meets DINOv3, 2026. URL: <https://arxiv.org/pdf/2509.20787> (дата звернення: 02.04.2026).
 6. Ultralytics YOLO Docs. Annotator. URL: <https://shorturl.at/zpJ0P> (дата звернення: 01.04.2026).
 7. Wei L., Dragomir A., Dumitru E., Christian S., Scott R., Cheng-Yang F., Alexander C. B. SSD: Single Shot MultiBox Detector, 2016. URL: <https://arxiv.org/pdf/1512.02325> (дата звернення: 03.03.2026).
 8. Wenyu L., Yian Z., Qinyao Ch., Kui H., Guanzhong W., Yi L. RT-DETRv2: Improved Baseline with Bag-of-Freebies for Real-Time Detection Transformer, 2024. URL: <https://arxiv.org/pdf/2407.17140> (дата звернення: 02.04.2026).
 9. What are the different types of object detection models? URL: <https://milvus.io/ai-quick-reference/what-are-the-different-types-of-object-detection-models> (дата звернення: 16.04.2026).
 10. Yunjie T., Yian Z., Qixiang Y., Kui H., David D. YOLOv12: Attention-Centric Real-Time Object Detectors, 2025. URL: [2502.12524v1.pdf](https://arxiv.org/pdf/2502.12524v1.pdf) (дата звернення: 25.03.2026).

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ ОБРОБКИ І ЗГЛАДЖУВАННЯ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Опасць Д.М.

E-mail: opaiets.daniiel@chnu.edu.ua

Науковий керівник: Данилюк І.М.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Фільтрація шумів і виділення значущих ознак належать до ключових задач сучасного комп'ютерного зору. Зображення, отримані з реальних джерел, як правило, містять адитивний шум різної природи – гауссівський, імпульсний або структурний, – що суттєво ускладнює подальший аналіз та розпізнавання об'єктів. Класичні підходи, засновані на жорстких матричних згортках (наприклад, фільтри Гаусса або усереднення у ковзному вікні), забезпечують

прийнятний результат для обмеженого класу задач, проте позбавлені можливості гнучко адаптуватися до локальних особливостей зображення. Більш перспективними в цьому відношенні є ітеративні моделі, що ґрунтуються на диференціальних рівняннях у частинних похідних. Метою цієї роботи є дослідження математичної моделі лінійної дифузії, побудова її дискретного аналогу та програмна реалізація чисельного методу розв'язання для обробки двовимірних піксельних масивів.

Теоретичною основою алгоритму є класична фізична модель лінійної дифузії – рівняння теплопровідності (форм. 1) [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (1)$$

де $u = u(x, y, t)$ — інтенсивність пікселя як функція просторових координат і часу, а Δ позначає оператор Лапласа. Із фізичної точки зору ця модель описує розтікання тепла в однорідному середовищі: чим довше відбувається процес (тобто чим більше ітерацій виконується), тим інтенсивніше розмивається зображення. Зв'язок між масштабним простором зображення та лінійною дифузією детально досліджено в роботі Ліндеберга, де показано, що гауссівське розмиття є єдиним лінійним оператором, що задовольняє аксіоми причинності і нелокального максимуму у масштабному просторі [1].

Перехід від неперервної до дискретної моделі здійснено методом скінченних різниць. Оператор Лапласа апроксимовано п'ятиточковим шаблоном (форм. 2) [2]:

$$\Delta u_{i,j} \approx u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} \quad (2)$$

Часова інтеграція виконується явною схемою Ейлера (форм. 3):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \cdot \Delta u_{i,j}^n \quad (3)$$

Умова чисельної стійкості явної схеми для двовимірного випадку накладає обмеження на крок за часом: $\Delta t \leq 0,25$. Порушення цієї умови призводить до експоненційного зростання похибки та нестабільності чисельного розв'язку. Для коректної обробки пікселів на межах зображення застосовано граничні умови Неймана, що відповідають нульовому потоку крізь межу масиву і забезпечують відсутність артефактів на краях.

Програмну реалізацію алгоритму виконано мовою TypeScript. Вибір мови зумовлений строгою типізацією, широкими можливостями для роботи з масивами та зручністю інтеграції з веб-технологіями. Інтерфейс користувача та логіку взаємодії побудовано засобами фреймворку Angular, що дозволило реалізувати наочну демонстрацію покрокового процесу дифузії в режимі

реального часу. Завантаження зображення, налаштування параметрів (коефіцієнта дифузії та кількості ітерацій) і відображення результату організовано у вигляді інтерактивного веб-застосунку.

Розроблений програмний модуль підтримує обробку як монохромних, так кольорових зображень у форматі RGBA. Для кольорових зображень дифузія застосовується до кожного кольорового каналу окремо із попереднім множенням на значення альфа-каналу, що забезпечує коректну обробку напівпрозорих ділянок і запобігає появі кольорових артефактів. У процесі дослідження (Рис. 1) проаналізовано вплив двох ключових параметрів: коефіцієнта дифузії та кроку за часом. Встановлено, що збільшення числа ітерацій призводить до поступового розмиття дрібних деталей (Рис. 2) і шуму при збереженні загальної структури зображення, тоді як некоректний вибір кроку інтегрування спричиняє чисельну нестабільність алгоритму.

Проведене дослідження підтверджує, що моделювання дифузійних процесів на базі рівняння теплопровідності є ефективним і математично обґрунтованим підходом до задачі фільтрації зображень. Метод скінченних різниць точно відтворює ітеративну фізичну природу дифузії і забезпечує задовільну точність при дотриманні умови стійкості. Розроблений алгоритм є не лише самостійним інструментом, а й математичним фундаментом для подальшого переходу до нелінійних анізотропних дифузійних моделей – зокрема моделі Перона-Маліка, – у яких інтенсивність розмиття динамічно адаптуватиметься до локального градієнта зображення, що дозволить зберігати чіткі межі об'єктів у процесі фільтрації.

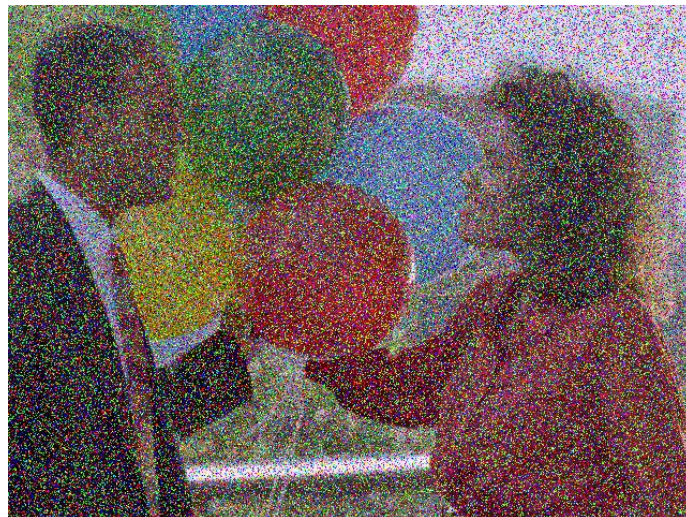


Рис. 1: Зображення до обробки



Рис. 2: Зображення після обробки

Список використаних джерел:

1. Lindeberg T. Scale-Space Theory in Computer Vision. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994. – 423 p.
2. Wardetzky M., Mathur S., Kälberer F., Grinspun E. Discrete Laplace operators: no free lunch // Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing (SGP 2007), Barcelona, Spain, July 4–6, 2007. – Aire-la-Ville: Eurographics Association, 2007. – P. 33–37.

**ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ГРАФІВ
KAMADANN ТА NEULAY З УРАХУВАННЯМ СТРУКТУРИ СПІЛЬНОТ**

Лінник О.С.

E-mail: linnyk2021mf12@student.karazin.ua

Науковий керівник: Полякова Л.Ю.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Візуалізація графів є важливим інструментом аналізу складних мереж, що дозволяє досліджувати їхню структуру, виявляти закономірності та інтерпретувати взаємозв'язки між елементами. Особливої уваги в задачах аналізу графів набуває відображення спільнот (кластерів), оскільки вони відображають природні групування вершин, характерні для соціальних, біологічних та інформаційних мереж.

Серед класичних алгоритмів укладання графів одним із найбільш відомих є Kamada–Kawai algorithm [1], який базується на фізичній моделі пружин. У цьому підході вершини розглядаються як точки в просторі, між якими діють сили, що прагнуть досягти рівноважного стану, мінімізуючи енергетичну

функцію. Такий підхід дозволяє отримувати якісні та інтерпретовані візуалізації, проте має високу обчислювальну складність, що обмежує його застосування для великих графів.

У сучасних дослідженнях активно розглядаються підходи до прискорення алгоритмів укладання графів за допомогою методів машинного навчання. Зокрема, Albert-László Barabási запропонував нейромережевий підхід до побудови графових розкладок (архітектуру NeuLay-2) [2], який дозволяє значно пришвидшити процес оптимізації. У роботі [3] було запропоновано алгоритм KamadaNN, що поєднує ідеї алгоритму Kamada–Kawai algorithm з нейромережевим прискоренням, аналогічним до підходу Barabási.

У даній роботі проведено порівняльний аналіз алгоритму KamadaNN та алгоритму NeuLay з точки зору якості візуалізації спільнот. Для цього було розроблено програмне забезпечення, яке реалізує повний цикл експериментів: побудову графів, застосування алгоритмів укладання, пошук спільнот та обчислення метрик якості.

У процесі дослідження було використано широкий набір тестових графів, які умовно поділено на три сімейства:

1. симетричні графи зі структурою спільнот;
2. несиметричні графи зі структурою спільнот;
3. графи без вираженої структури спільнот.

Такий поділ дозволив оцінити поведінку алгоритмів у різних умовах та проаналізувати їхню чутливість до геометричних і структурних властивостей графа.

Для кожного графа експеримент проводився за однаковою схемою. Спочатку будувалися укладки за допомогою алгоритмів KamadaNN та NeuLay-2 і виконувалося розбиття графа на спільноти з використанням чотирьох різних методів [4][5]:

- алгоритм Louvain;
- greedy modularity;
- label propagation;
- алгоритм Girvan–Newman.

Після цього для кожної пари «укладка – розбиття на спільноти» обчислювалися метрики якості, що характеризують просторове розташування спільнот [6][7]:

1. індекс Девіса–Болдіна;
2. коефіцієнт силуету;
3. компактність спільнот;
4. сепарація спільнот.

Використання кількох алгоритмів пошуку спільнот дозволило зменшити вплив випадковості та підвищити надійність оцінки, а набір метрик забезпечив комплексний аналіз як внутрішньої щільності кластерів, так і їх взаємного розділення у просторі.

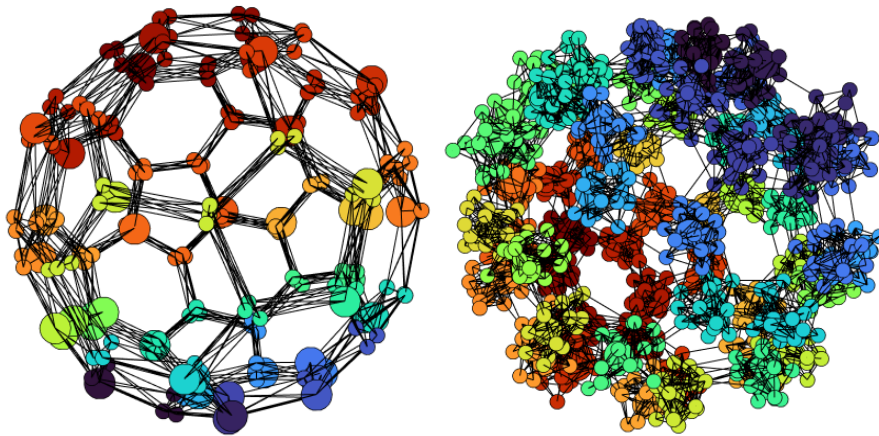


Рис. 1а), 1б): граф футбольного м'яча зі спільнотами з різними параметрами

Окрему увагу в роботі приділено побудові тестових даних. Було розроблено два універсальні генератори графів зі спільнотами. Перший генератор замінює кожен вузол заданого графа на спільноту та створює ребра між ними відповідно до структури вихідного графа. Другий генератор замінює вузли одного графа копіями іншого графа, формуючи складніші багаторівневі структури, також додаючи ребра відповідно до структури першого графа. Також у рамках роботи було запропоновано граф футбольного м'яча (рис. 1а), рис. 1б)) зі спільнотами, який подано до включення в бібліотеку NetworkX [8].

Таблиця 1: Результати порівняльних експериментів

Louvain	DB	Silhouette	Compactness	Separation
ComSymGraphs	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN	NeuLay-2
ComNoSymGraphs	Draw	Draw	Draw	Draw
NoComGraphs	KamadaNN	Draw	Draw	Draw
Greedy	DB	Silhouette	Compactness	Separation
ComSymGraphs	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN
ComNoSymGraphs	Draw	Draw	Draw	Draw
NoComGraphs	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN	Draw
Label propagation	DB	Silhouette	Compactness	Separation
ComSymGraphs	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN
ComNoSymGraphs	NeuLay-2	Draw	Draw	Draw
NoComGraphs	Draw	Draw	KamadaNN	KamadaNN
Girvan-Newman	DB	Silhouette	Compactness	Separation

ComSymGraphs	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN	KamadaNN
ComNoSymGraphs	Draw	Draw	Draw	Draw
NoComGraphs	KamadaNN	Draw	KamadaNN	KamadaNN

Вище наведено агреговані по семействам графів результати проведених експериментів (табл. 1): в клітинках зазначено який з алгоритмів дає кращу метрику для кожного семейства графів та алгоритму пошуку спільнот, Draw відповідає ситуації коли жоден з алгоритмів не дав значної переваги. Отримані експериментальні результати показали, що алгоритм KamadaNN демонструє суттєво кращу якість відображення спільнот для симетричних графів зі структурою спільнот. Для несиметричних графів та графів без вираженої спільнотної структури результати KamadaNN та NeuLay-2 виявилися співставними, і жоден із алгоритмів не має стабільної переваги.

Таким чином, проведене дослідження підтверджує ефективність запропонованого алгоритму KamadaNN та його конкурентоспроможність відносно сучасних нейромережових підходів. Отримані результати свідчать про доцільність подальшого розвитку методів укладання графів, орієнтованих на коректне відображення структурних властивостей, зокрема спільнот.

Список використаних джерел:

1. Kamada T., Kawai S. An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters*. 1989. Vol. 31, № 1. P. 7–15.
2. Wang Y., Shen H., Cheng X., Barabási A.-L. Accelerating network layouts using graph neural networks. *Nature Communications*. 2023. Vol. 14. Article 141.
3. Linnyk O., Polyakova L., Zaretska I. On Kamada-Kawai graph layout with graph neural networks. *Radioelectronic and Computer Systems*. 2025. Vol. 2025, № 3. P. 78–92.
4. Schaub M. T., Delvenne J.-C., Rosvall M., Lambiotte R. The many facets of community detection in complex networks. *Applied Network Science*. 2017. Vol. 2. Article 4.
5. Malliaros F. D., Vazirgiannis M. A survey of community detection: Algorithms, applications, and beyond. *ACM Computing Surveys*. 2013. Vol. 45, № 3. Article 43.
6. Fortunato S. Community detection in graphs. *Physics Reports*. 2010. Vol. 486, № 3–5. P. 75–174.
7. Fortunato S., Hric D. The many facets of community detection in complex networks. *Nature Physics*. 2016. Vol. 12. P. 616–626.
8. Hagberg A., Swart P., S Chult D. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. *Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy)*. 2008. P. 11–15.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ РЕСПІРАТОРНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ ЗА РЕНТГЕНІВСЬКИМИ ЗНІМКАМИ

Анісімова К.А.

E-mail: k.anisimova_fit_13_24_b_d@knute.edu.ua

Єфімов Д.І.

E-mail: d.yefimov@knute.edu.ua

Науковий керівник: Єфімов Д.І.

Державний торговельно-економічний університет

У роботі досліджується ефективність методів глибокого навчання для діагностики патологій легень на основі рентгенівських знімків. Автоматизація аналізу медичних зображень є критично важливою для прискорення діагностики. Основним викликом є перекриття візуальних ознак різних типів респіраторних захворювань, а також незбалансованість медичних наборів даних. Реалізовано пайплайн класифікації на чотири класи: нормальний стан, пневмонія, COVID-19 та туберкульоз. Проведено порівняльний аналіз п'яти архітектур: двох базових згорткових мереж та трьох моделей із використанням transfer learning (ResNet [1], DenseNet [2], EfficientNet [3]). Найкращий результат продемонструвала модель DenseNet121, досягнувши macro F1 = 0.93. Для інтерпретації роботи моделей застосовано метод Grad-CAM.

Використано набір даних із 7097 зображень (із датасетів [4], [5], [6]), розділений на навчальну і тестову вибірки. Навчальна вибірка містить 6326 зображень, тестова — 771. Класи є незбалансованими: близько 61% усіх знімків в тренувальній вибірці відносились до класу PNEUMONIA. Усі зображення було приведено до розміру 224×224. Для навчання застосовано аугментації: горизонтальне віддзеркалення, випадковий поворот, варіації яскравості й контрасту, а також невеликі афінні зсуви. Як для тренувальної, так і для тестової частини використовувалася нормалізація з параметрами ImageNet.

Було протестовано п'ять архітектур. Першою була базова згорткова мережа з трьома Conv-MaxPool блоками та двошаровим fully connected класифікатором із dropout. Вона слугує baseline-моделлю. Другою була згорткова мережа, у якій використано блоки Conv + BatchNorm + ReLU, глибшу ієрархію каналів, Dropout2D та Global Average Pooling. Ця архітектура побудована як покращена альтернатива базовій CNN.

Після цього були проведені експерименти з переднавченими мережами. ResNet101 була ініціалізована вагами, попередньо навченими на ImageNet; backbone спочатку заморожувався, а classifier замінювався на нову голову. Після

початкового етапу навчання було розморожено останні дві групи residual layers і виконано fine-tuning. Аналогічно була адаптована DenseNet121: спочатку навчався лише classifier, після чого було розморожено denseblock4, transition3, norm5 і голову класифікації. Останньою моделлю стала EfficientNetV2-S. Як і для інших попередньо навчених моделей, спочатку навчалася тільки нова класифікаційна голова, а потім було виконано fine-tuning останніх двох блоків ознак.

Методологія навчання передбачала використання оптимізатора Adam із початковою швидкістю навчання 0.001 та планувальника CosineAnnealingLR для поступового зниження швидкості навчання, що сприяє стабільній збіжності моделі. Оцінювання якості здійснюється за метрикою Macro F1-score, що є доцільним для багатокласових задач із можливим дисбалансом класів. Іншою важливою метрикою є Recall за класами, що зумовлено медичним доменом.

Таблиця 1: Результати на тестовій вибірці

Модель	Macro F1	Recall (COVID19)	Recall (NORMAL)	Recall (PNEUMONIA)	Recall (TB)
Baseline 1	0.84	0.93	0.53	0.97	0.98
Baseline 2	0.87	0.92	0.76	0.90	0.85
ResNet101	0.92	0.97	0.70	0.99	1.00
DenseNet121	0.93	0.98	0.76	0.98	0.98
EfficientNetV2-S	0.92	0.98	0.71	0.99	0.98

Пріоритетом даної системи є мінімізація False Negative результатів. Високі показники Recall для класів респіраторних захворювань свідчать про надійність моделей як інструментів первинного скринінгу, де пропуск захворювання є критично неприпустимим.

У всіх попередньо навчених моделей спостерігалось покращення після fine-tuning верхніх шарів. Це вказує на те, що загальні ознаки ImageNet корисні, але для рентгенівських зображень потрібна додаткова адаптація під медичний домен. Водночас найстабільніше помилкові класифікації стосувалися класу NORMAL, що узгоджується з медичною природою задачі: модель частіше демонструє консервативну поведінку і відносить нормальні знімки до патології.

Actual	COVID19	104	0	0	2
	NORMAL	2	177	55	0
	PNEUMONIA	0	8	382	0
	TB	1	0	0	40
	Predicted	COVID19	NORMAL	PNEUMONIA	TB

Рис. 1. Матриця помилок для DenseNet121 на тестовій вибірці

Для інтерпретації роботи моделей було застосовано Grad-CAM, який дозволяє виділити просторові області зображення, що найбільше впливають на класифікацію. Результати показують, що модель у більшості випадків фокусується на ділянках легеневої тканини, що є коректною поведінкою з точки зору медичної інтерпретації. Це підтверджує, що модель використовує релевантні анатомічні ознаки, а не випадкові артефакти зображення, що підвищує довіру до її прогнозів у медичному контексті.

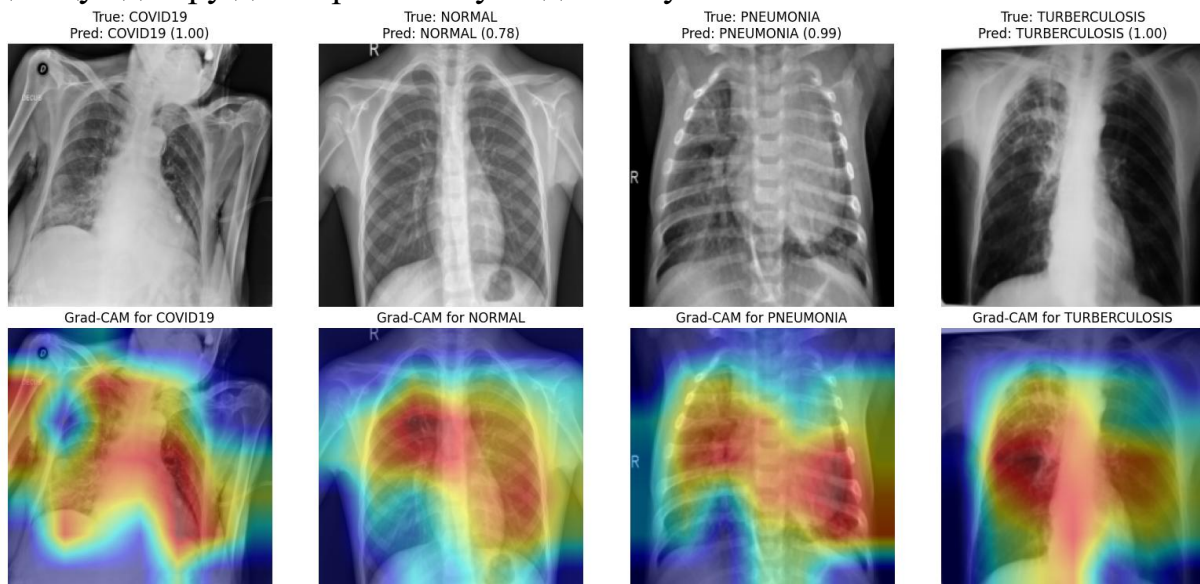


Рис. 2. Візуалізації Grad-CAM

Висновок. Проведені експерименти показали, що для класифікації рентгенівських знімків грудної клітки transfer learning є значно ефективнішим за навчання CNN з нуля. Найкращу продуктивність продемонструвала DenseNet121, яка досягла macro F1 = 0.93. Значення Recall для кожного класу

хвороб склало 0.98, тоді як для класу Normal було досягнуто 0.76, що може бути прийнятним у медичних задачах, де пріоритетом є висока чутливість до патологій та мінімізація помилок типу false negatives, тобто пропусків захворювань. Отримані результати підтверджують доцільність використання попередньо навчених моделей і подальшого fine-tuning для медичної класифікації зображень.

Список використаних джерел:

1. He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. Deep Residual Learning for Image Recognition. Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2016, 770–778. URL:<https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90> (Дата звернення: 18.03.2026)
2. Huang, G., Liu, Z., Van Der Maaten, L., & Weinberger, K. Q. Densely Connected Convolutional Networks. Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2017, 4700–4708. URL:<https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.243> (Дата звернення: 18.03.2026)
3. Tan, M., & Le, Q. (2021). EfficientNetV2: Smaller Models and Faster Training. Proceedings of the International Conference on Machine Learning (ICML). arXiv:2104.00298
4. Kermany, D. S., et al. Identifying medical diagnoses and treatable diseases by image-based deep learning. Cell, 2018, 172(5), 1122–1131.e9. <https://doi.org/10.1016/j.cell.2018.02.010> (Дата звернення: 18.03.2026)
5. Rahman, T., et al. Reliable tuberculosis detection using chest X-ray with deep learning, segmentation and visualization. IEEE Access, 2020, 8, 191586–191601. URL:<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3031384> (Дата звернення: 18.03.2026)
6. Cohen, J. P., Morrison, P., Dao, L., Roth, K., Duong, T. Q., & Ghassemi, M. COVID-19 image data collection (COVID chest X-ray dataset) [Data set], 2020. GitHub. URL:<https://github.com/ieee8023/covid-chestxray-dataset> (Дата звернення: 18.03.2026) arXiv:2006.11988

РОЗРОБКА БАГАТОАГЕНТНОЇ СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ SDN-МЕРЕЖ З АДАПТИВНОЮ ТЕЛЕМЕТРІЄЮ

Балашов О.В.

E-mail: oleksii.balashov@student.karazin.ua

Науковий керівник: Руккас К.М.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Програмно-визначені мережі (SDN) забезпечують гнучке централізоване керування мережевою інфраструктурою, однак зі збільшенням масштабу

топології традиційний моніторинг створює надлишковий службовий трафік і знижує чутливість до локальних аномалій. Мета роботи — розробити багатоагентну систему моніторингу SDN, яка поєднує децентралізовану оцінку стану каналів із адаптивною телеметрією та забезпечує кращу стійкість у динамічних умовах.

Систему реалізовано на базі Mininet і Ryu (OpenFlow 1.3). Архітектура включає агент збору телеметрії, агент аналізу стану та координатор глобального стану; у децентралізованому режимі додатково використано локальні агентні оцінки каналів і сегментну агрегацію. Запропоновано адаптивну політику звітності: у стабільних умовах передаються компактні heartbeat-повідомлення, а за ознак деградації активується повна подієва звітність. На рівні контролера реалізовано адаптивний інтервал polling статистики портів.

Експериментальна оцінка проводилась на топологіях 3/5/7/10 комутаторів із профілями трафіку *stable*, *peak*, *mixed*, *failure_like* та *unexpected_burst*. У серії повних кампаній (360 сценаріїв) підтверджено відтворюваність результатів і базову коректність агентного контуру (accuracy 0.75, FPR 0.00, FNR 0.15). Для прикладної оцінки ефекту виконано А/В-порівняння: *adaptive* проти *static* політики звітності та *normal* проти *degraded* видимості контролера. У першому випадку отримано зменшення службової телеметрії (*telemetry reduction gain* 6.67%) без втрати точності детекції. У другому випадку в стрес-умовах *decentralized*-режим показав вищу стійкість порівняно з *centralized* (*accuracy gain* 0.4445 і *FNR gain* 0.4444 у *degraded*-зрізі).

Додатково виконано порівняння *threshold* та ML-аналітики. У *runtime*-кампанії з єдиною матрицею умов (*analyzer_mode=threshold|ml*) ML-підхід показав покращення якості детекції (*accuracy gain* +0.0278) без зростання FPR/FNR. У пілотному *offline*-порівнянні на відкладеній тестовій вибірці ML-бейзлайн (*nearest centroid*) дав виразніший приріст: *accuracy* зросла з 0.7778 до 0.9167 (+0.1389), FNR зменшилась з 0.1111 до 0.0278 (покращення 0.0833) за незмінного FPR = 0.0. Отримані результати підтверджують доцільність переходу від фіксованих порогів до навчуваних моделей у задачі моніторингу SDN.

Таким чином, запропонована багатоагентна система забезпечує одночасно підвищення стійкості моніторингу, зниження накладних витрат телеметрії та відтворюваність експериментальних результатів. Подальші дослідження передбачають масштабування на більші топології, *online/continuous* калібрування моделі та використання методів глибинного навчання з підкріпленням.

Список використаних джерел:

1. ETSI GS ZSM 002 V1.1.1. Zero-touch network and Service Management (ZSM); Reference Architecture. ETSI, 2019. 80p.
2. ETSI GS ENI 005 V2.1.1. Experiential Networked Intelligence (ENI); System Architecture. ETSI, 2021. 174p.
3. IETF RFC 7426. Software-Defined Networking (SDN): Layers and Architecture Terminology. 2015. 35p.
4. Kreutz D., Ramos F., Verissimo P. et al. Software-Defined Networking: A Comprehensive Survey. Proceedings of the IEEE. 2015. Vol. 103, No. 1. P. 14-76.
5. Sutton R. S., Barto A. G. Reinforcement Learning: An Introduction. 2nd ed. Cambridge: MIT Press, 2018. 352p.
6. Mininet Project. Mininet Documentation. URL: <https://mininet.org/> (дата звернення: 20.04.2026).
7. Ryu SDN Framework. Ryu Documentation. URL: <https://ryu.readthedocs.io/> (дата звернення: 20.04.2026).
8. Open vSwitch. Official Documentation. URL: <https://docs.openvswitch.org/> (дата звернення: 20.04.2026).
9. Scikit-learn Developers. Scikit-learn User Guide. URL: https://scikit-learn.org/stable/user_guide.html (дата звернення: 20.04.2026).

РОЗРОБКА ВЕБ-СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ КОРИСТУВАЧАМИ З АВТОРИЗАЦІЮ НА ОСНОВІ РОЛЕЙ І ТОКЕНІВ JWT У СЕРЕДОВИЩІ ASP.NET CORE

Бреник М.В.

E-mail: brenyk.maksym@chnu.edu.ua

Науковий керівник: Данилюк І.М.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Забезпечення надійної автентифікації та авторизації є однією з фундаментальних вимог до сучасних веб-застосунків. Зі зростанням кількості розподілених систем традиційні сесійні механізми поступаються токен-орієнтованим підходам, що не потребують збереження стану на сервері. Серед таких підходів особливого поширення набула технологія JSON Web Token у поєднанні з рольовою моделлю розмежування доступу. Платформа ASP.NET Core надає розвинену інфраструктуру для реалізації подібних рішень через механізм middleware та вбудовані бібліотеки Identity й Authorization [1]. Метою цієї роботи є проектування та розробка веб-системи керування користувачами, що реалізує JWT-автентифікацію та рольову авторизацію у середовищі ASP.NET Core.

JWT є відкритим стандартом (RFC 7519), який визначає компактний формат передачі даних між сторонами у вигляді JSON-об'єкта [2]. Токен складається з заголовка, корисного навантаження та підпису, закодованих у Base64URL. Завдяки криптографічному підпису сервер верифікує цілісність кожного запиту без звернення до бази даних, що знижує затримки та навантаження. Рольова модель контролю доступу (RBAC) реалізується в ASP.NET Core через атрибут `[Authorize(Roles = "Admin")]`, що дозволяє декларативно обмежувати доступ до окремих контролерів або дій [3].

Архітектуру системи побудовано за тришаровою схемою: рівень представлення – REST API на ASP.NET Core; рівень бізнес-логіки – сервіси автентифікації, авторизації та управління обліковими записами; рівень даних – Entity Framework Core з СУБД PostgreSQL. Усі комунікації між клієнтом і сервером здійснюються через захищений протокол HTTPS. Процес автентифікації відбувається наступним чином: клієнт надсилає облікові дані на ендпоінт `/api/auth/login`; сервер перевіряє їх, використовуючи BCrypt для порівняння хешів паролів, і повертає короткостроковий access-токен із терміном дії 15 хвилин та refresh-токен із терміном дії 30 діб [4]. Валідація токенів виконується через `TokenValidationParameters` з перевіркою підпису, емітента, аудиторії та терміну дії. Після закінчення дії access-токена клієнт використовує refresh-токен для отримання нової пари без повторного введення пароля. Рекомендації щодо безпечного застосування JWT описано в RFC 8725 [5].

Система підтримує три ролі: Administrator із повним доступом, Manager з доступом до операційних даних та User, обмежений власними ресурсами. Зміна ролей здійснюється через адміністративний інтерфейс із веденням журналу аудиту. Дотримано принцип мінімальних привілеїв, а застосування policy-based authorization дозволяє поєднувати ролі з claims для гнучкішого контролю доступу [3].

Тестування проводилось засобами xUnit і Moq із покриттям 87 %. Навантажувальне тестування (k6) підтвердило обробку 500 одночасних запитів із середнім часом відповіді 120 мс при масштабуванні на два екземпляри сервісу.

Розроблена система забезпечує надійну JWT-автентифікацію та гнучке розмежування доступу в ASP.NET Core. Поєднання refresh-токенів, BCrypt і policy-based authorization формує сучасну масштабовану архітектуру безпеки, придатну для застосування у промислових вебзастосунках.

Список використаних джерел:

1. Configure JWT bearer authentication in ASP.NET Core. Microsoft Learn. URL: <https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/security/authentication/configure-jwt-bearer-authentication>

- (дата звернення: 03.04.2026).
2. Jones M., Bradley J., Sakimura N. JSON Web Token (JWT) : RFC 7519. Internet Engineering Task Force (IETF). May 2015. URL: <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc7519> (дата звернення: 03.04.2026).
 3. Role-based authorization in ASP.NET Core. Microsoft Learn. URL: <https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/security/authorization/roles> (дата звернення: 03.04.2026).
 4. JWT Validation and Authorization in ASP.NET Core. .NET Blog. Microsoft. URL: <https://devblogs.microsoft.com/dotnet/jwt-validation-and-authorization-in-asp-net-core/> (дата звернення: 03.04.2026).
 5. Sheffer Y., Hardt D., Jones M. JSON Web Token Best Current Practices : RFC 8725. Internet Engineering Task Force (IETF). February 2020. URL: <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc8725> (дата звернення: 03.04.2026).

РОЗРОБКА МУЛЬТИАГЕНТНОЇ СИСТЕМИ ДИНАМІЧНОГО УПРАВЛІННЯ SDN-МЕРЕЖАМИ

Руккас К.М.

E-mail: rukkas@karazin.ua

Борейко А.О.

E-mail: boreiko2021mp11@student.karazin.ua

Науковий керівник: Руккас К.М.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Програмно-визначені мережі (SDN) забезпечують централізоване управління мережевою інфраструктурою через відокремлення площини управління від площини передачі даних. Традиційні алгоритми маршрутизації, зокрема алгоритм Дейкстри, обирають статичний найкоротший шлях незалежно від поточного навантаження, що при одночасній передачі декількох потоків призводить до перевантаження спільних каналів. Мета роботи — розробити мультиагентну систему на основі навчання з підкріпленням, здатну динамічно розподіляти трафік між альтернативними маршрутами.

Тестування проводилось у емуляторі Mininet на топології з 6 комутаторів, з'єднаних асиметричними каналами (8–15 Мбіт/с), з контролером Ryu (OpenFlow 1.3). Наявність декількох шляхів різної пропускної здатності створює можливості для балансування навантаження, які статичний алгоритм не використовує.

Для кожної пари комутаторів створюється окремий Q-learning агент, що обирає один із доступних маршрутів. Ключовою інновацією є *відносний стан шляху*: агент спостерігає дискретизовану завантаженість каналів, що належать

саме його кандидатним маршрутам, а не глобальний стан мережі. Це забезпечує пряму залежність між спостереженням та дією — якщо один із шляхів завантажений, агент бачить це у своєму векторі стану.

Додатково запропоновано три механізми. По-перше, ініціалізація Q-таблиці з використанням алгоритму Дейкстри: коротші шляхи отримують вищі початкові Q-значення, тому до накопичення досвіду агент поводить себе не гірше за статичний алгоритм. По-друге, координаційний менеджер, побудований на основі моделі розподіленої маршрутизації Галлагера: протягом часового вікна рішення агентів відстежуються, і наступний агент коригує свої Q-значення з урахуванням уже використаних каналів. По-третє, обчислення нагороди у момент вибору дії на основі стану мережі до початку передачі потоку, що усуває проблему хибного сигналу винагороди.

Навчання проводилось протягом 390 епізодів із лінійним зменшенням ϵ від 0.5 до 0.05. Програма акцентує конкурентні сценарії (70% епізодів), оскільки саме в них очікується перевага адаптивного підходу. Порівняння проводилось у чотирьох сценаріях: одиночний потік, конкуруючі потоки до одного призначення, перехресні потоки та двонаправлена передача.

Мультиагентна система показала середнє покращення пропускної здатності на +34.3% порівняно з базовим контролером. Найбільший виграш — у сценарії з конкуруючими потоками до одного призначення: +84.1% (21.14 проти 11.48 Мбіт/с). Для перехресних потоків покращення становить +50.9% (20.92 проти 13.87 Мбіт/с). У сценаріях з одним потоком та двонаправленою передачею система зберігає паритет із базовим контролером (+1.5% та +0.6%), що підтверджує коректність початкової ініціалізації.

Таким чином, запропонована мультиагентна система ефективно розв'язує задачу динамічного розподілу трафіку в SDN-мережах. Подальші дослідження передбачають перевірку ефективності системи на топологіях більшого масштабу та застосування методів глибинного навчання з підкріпленням.

Список використаних джерел:

1. Busoniu L., Babuska R., De Schutter B. Multi-Agent Reinforcement Learning: An Overview. *Innovations in Multi-Agent Systems and Applications*. Berlin: Springer, 2010. P. 183–221.
2. Gallager R. G. A Minimum Delay Routing Algorithm Using Distributed Computation. *IEEE Transactions on Communications*. 1977. Vol. 25, No. 1. P. 73–85.
3. Kreutz D., Ramos F., Verissimo P. Software-Defined Networking: A Comprehensive Survey. *Proceedings of the IEEE*. 2015. Vol. 103, No. 1. P. 14–76.
4. McKeown N., Anderson T., Balakrishnan H. et al. OpenFlow: Enabling

Innovation in Campus Networks. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*. 2008. Vol. 38, No. 2. P. 69–74.

5. Sutton R. S., Barto A. G. Reinforcement Learning: An Introduction. 2nd ed. Cambridge: MIT Press, 2018. 552 p.

РОЗРОБКА СИСТЕМИ ПРЕДИКТИВНОГО УСУНЕННЯ МАРШРУТИЗАЦІЙНИХ ПЕТЕЛЬ НА ОСНОВІ ТЕХНОЛОГІЇ INTENT- BASED NETWORKING

Кравченко Ірина Петрівна

E-mail: st8070699@stud.duikt.edu.ua

*Науковий керівник: Бученко Ігор Анатолійович, к.т.н., доцент
Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій*

Традиційні методи запобігання мікропетлям (LFA, TI-LFA) базуються на статичному розрахунку резервних шляхів. Проте в умовах динамічних навантажень та частих коливань каналів (link flapping), статичні алгоритми не встигають адаптуватися, що призводить до каскадних відмов.

Постановка задачі. Розробка інтелектуального модуля для комп'ютерної мережі, який здатний прогнозувати ймовірність появи мікропетель на основі аналізу телеметрії в реальному часі.

Мета дослідження. Застосування рекурентних нейронних мереж (RNN), зокрема архітектури LSTM (Long Short-Term Memory), для аналізу часових рядів мережевого трафіку та попередження переходів мережі у нестабільний стан.

Результати дослідження. Наукова новизна полягає у відмові від реактивного перемикавання трафіку. Запропонована система працює за принципом «превентивної конвергенції». Модуль ML аналізує затримки (RTT), джиттер та частоту оновлень LSDB.

Алгоритм передбачає три етапи:

- Збір телеметрії: Вузол збирає дані про стан суміжних лінків.
- Прогноз нестабільності: Якщо модель прогнозує високу ймовірність збою (Anomaly Score > 0.8), система заздалегідь активує механізм TI-LFA для критичних потоків, не чекаючи фізичного обриву.
- Оптимізація ваг: Корегування вартості метрик лінків для «м'якого» виведення навантаженого каналу з експлуатації до моменту його відмови.

У ході експерименту було навчено модель на датасеті мережевої активності корпоративного дата-центру. Результати показують, що точність

прогнозування критичних станів, які ведуть до утворення мікропетель, становить 94,2% (рис. 1).

NETWORK ARCHITECTURE FOR ML-BASED PREDICTIVE MICRO-LOOP PEVENTION

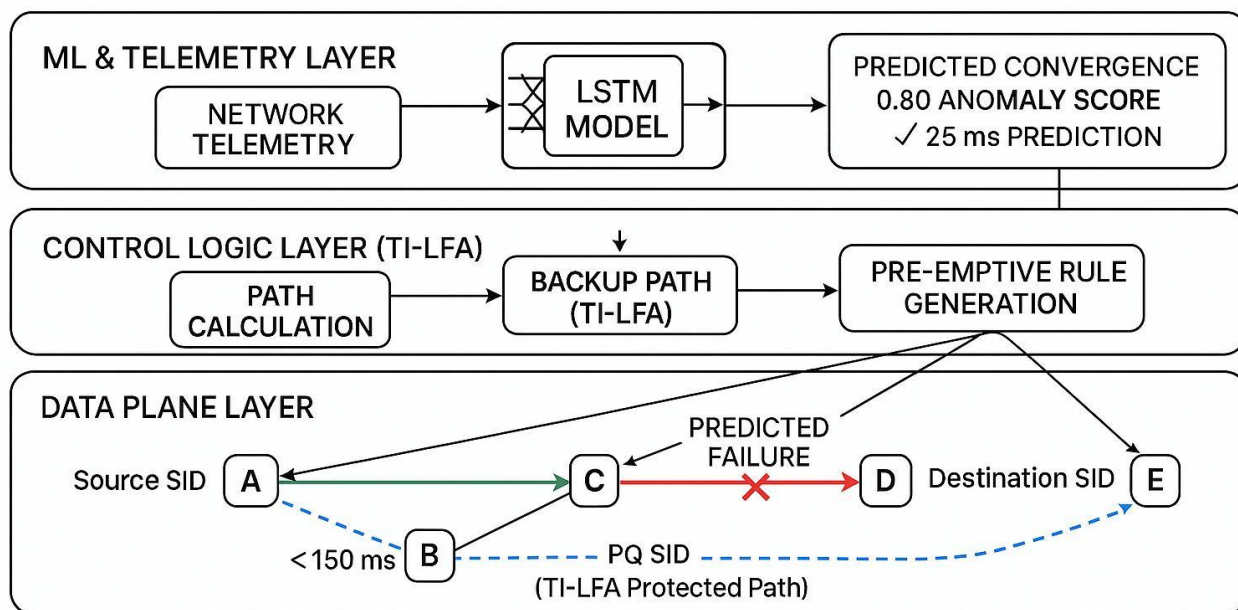


Рис. 1. Результати навчання моделі прогнозування стабільності топології

Це дозволяє практично повністю нівелювати Packet Loss (зниження до 0,01%), оскільки перемикання на резервний шлях відбувається за 100-150 мс до фактичного розриву з'єднання.

Висновки. Інтеграція методів штучного інтелекту в роботу мережевих протоколів дозволяє реалізувати концепцію Self-Healing Networks. Використання LSTM-моделей забезпечує предиктивний захист від маршрутизаційних аномалій, що є критично важливим для хмарних інфраструктур наступного покоління.

Список використаних джерел:

1. Поповський В. В., Олійник В. Ф. Математичні основи керування та адаптації в телекомунікаційних мережах. Харків: СМІТ, 2011. 362 с.
2. Wang M. et al. Machine Learning for Networking: Workflow, Advances and Opportunities. *IEEE Network*. 2022. Vol. 32, No. 2. P. 92–99.
3. Goodfellow I. Deep Learning. MIT Press, 2016. 800 p.

СТВОРЕННЯ СТРАТЕГІЇ ПОЕТАПНОГО НАВЧАННЯ ТА АНАЛІЗ ЇЇ ВПЛИВУ НА АГЕНТА RL У СЕРЕДОВИЩІ КЛАСИЧНОЇ ФІЗИКИ

Вербицька М.О.

E-mail: mariia.verbytska@ukma.edu.ua

This work investigates the practical importance of applying curriculum learning principles to the MuJoCo HalfCheetah Reinforcement Learning (RL) agent's performance in a changing physics environment. In the scope of this paper, we consider the core physics changes in world dynamics, specifically, ground friction and joint damping. According to our initial hypothesis, presenting these criteria within the curriculum learning framework enables the policy to adapt to unexpected physics alterations, thereby generalising more robustly to unseen conditions. The results of this paper include recommendations for selecting physics parameter strategies for curriculum learning.

Keywords: curriculum learning, classic physics, environment dynamics, robustness

Стратегія поетапного навчання з підкріпленням – це метод оптимізації, що заснований на використанні попередньо накопичених знань, який допомагає агенту знаходити рішення повного набору завдань із вищою точністю та/або швидкістю. Завдання в навчанні з підкріпленням визначається марковським процесом, а послідовність завдань є орієнтованим ациклічним графом.

$$C = (V, E, g, T) \tag{1}$$

У такому графі завдань (форм. 1) V – це множина вершин, $E \subseteq \{(x, y) \mid (x, y) \in V \times V \wedge x \neq y\}$ – це множина орієнтованих ребер, $g : V \rightarrow P(D^T)$ – функція, що пов'язує вершини з підмножинами варіантів переходу у D^T – множині всіх можливих варіантів із T . У контексті навчання RL-агента ця техніка передбачає поступову зміну параметрів у процесі тренування. Відтак це дозволяє структуровано вводити варіативність у середовище й має позитивний вплив на генералізацію у раніше невідомих динамічних умовах.

Класичні політики навчання з підкріпленням не є адаптованими до змін умов середовища, у якому агент був спершу натренований. Це пов'язано з природою RL-агентів, які здебільшого спеціалізуються на виконанні однієї поставленої задачі, тож генералізація за замовчуванням не є нативною; при цьому донавчання в умовах, що дозволяють динаміку, або зміна функції винагороди часто є виснажливими діями з точки зору обчислювальної складності або витрат. Використання методу поетапного навчання може стати в нагоді під час розв'язання конкретного сценарію, який уможливорює зміну параметрів середовища агента, наприклад, застосування RL-рішення із даними реального світу.

Перевірка впливу використання структурованого плану на стійкість RL-політики до змін фізичних параметрів середовища здійснювалася у межах фреймворку **MuJoCo** – фізичного двигуна з відкритим кодом, який створено для досліджень динаміки багатоланкових систем із урахуванням контактної взаємодії. У цій роботі ми зосередилися на створенні Curriculum Learning-стратегії для фізичних параметрів середовища **HalfCheetah** – бенчмарку в галузі навчання агентів руху. Зокрема, було розглянуто два параметри: коефіцієнт тертя *geom_friction*, що регулює всі контакти між частинами тіла агента та поверхнею, і коефіцієнт демпфірування *dof_damping*, що визначає в'язкий опір у кожному зі ступенів свободи суглобів агента.

Таблиця 1: Початкові значення критерію *geom_friction*

sliding	torsional	rolling
0.4	0.1	0.1

Таблиця 2: Початкові значення критерію *dof_damping*

Torso x / Рух вперед	Torso z / Рух вгору чи вниз	Torso кут нахилу	Bthigh / заднє стегно	Bshin / задня гомілка	Bfoot / задня стопа	Fthigh / переднє стегно	Fshin / передня гомілка	Ffoot / передня стопа
0	0	0	6	4.5	3	4.5	3	1.5

Типова модель HalfCheetah має стандартні налаштування параметрів *geom_friction* (табл. 1) та *dof_damping* (табл. 2). Підкреслимо, що в контексті роботи з HalfCheetah ми здебільшого зацікавлені лише у типі тертя *sliding*, оскільки інші два не впливають на динаміку відтворення бігу.

У цій роботі ми створили власну стратегію поступового навчання політики агента, коли складність параметрів, що розглядаються, невпинно прогресує. Під час формування цього набору ми дотримувалися таких правил:

1. Зміни значень тертя *geom_friction* всіх складових виконавця відбуваються узгоджено: ми змінюємо число і розповсюджуємо його для всіх 9 частин агента.
2. Зберігаємо логічну впорядкованість значень критерію *dof_damping*: значення зменшуються від стегна до стопи ($6 \rightarrow 4.5 \rightarrow 3$), а передні ноги є легшими від задніх ($4.5 \rightarrow 3 \rightarrow 1.5$ проти $6 \rightarrow 4.5 \rightarrow 3$).

Для ефективної та ґрунтовної перевірки ми обрали дві стратегії введення змінних значень для параметрів. У випадку *geom_friction* ми застосували метод

рандомізації з розширенням діапазону, що відповідає класичній ідеї Automatic Domain Randomisation.

Таблиця 3: Стратегія для *sliding geom_friction*

Крок	Діапазон	Пояснення
1.	[0.35; 0.45]	Близько до дефолтних значень
2.	[0.25; 0.65]	Трохи ширший розмах
3.	[0.2; 0.8]	Широкий
4.	[0.2; 1.0]	Повний діапазон

Таким чином, дисперсія параметра *geom_friction* прогресивно зростає з переходом на новий етап навчальної стратегії (табл. 3), додаючи складність і піддаючи агента випробуванню. Важливо зазначити, що зміни стосуються лише типу *sliding friction*.

Натомість параметр *dof_damping* потребує дещо іншого підходу до роботи з динамікою, а саме використання коефіцієнта масштабування.

Таблиця 4: Стратегія для *dof_damping*

Крок	Інтервал коефіцієнта масштабування	Пояснення
1.	[0.9; 1.1]	±10% від дефолту
2.	[0.7; 1.3]	±30%
3.	[0.5; 1.5]	±50%
4.	[0.2; 2.0]	Повний діапазон

Це дозволяє змінювати значення критерію для суглобів агента пропорційно дефолту (табл. 4). Таким чином, ми зберігаємо фізичну коректність показників. У цьому випадку для кожного епізоду обирається один скалярний коефіцієнт рандомізації і застосовується до всіх 9 значень критерію відносно їхніх початкових величин.

У цій роботі ми описали практичну значимість методу поетапного навчання для RL-агентів, а також сформувавши політики вибору значень двох параметрів класичного фізичного світу навчання з підкріпленням – *geom_friction* та *dof_damping* – у контексті роботи в середовищі HalfCheetah. Ці результати

служують експериментальною базою для аналізу впливу концепції curriculum learning на RL-агентів у фреймворку MuJoCo у порівнянні зі стандартним методом Proximal Policy Optimisation (PPO).

Список використаних джерел:

1. Akkaya I. et al. Solving Rubik's Cube with a Robot Hand : препринт. 2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1910.07113> (дата звернення: 28.03.2026).
2. Half Cheetah [Електронний ресурс] / Gymnasium Documentation. URL: https://gymnasium.farama.org/environments/mujoco/half_cheetah/ (дата звернення: 28.03.2026).
3. Narvekar S. et al. Curriculum learning for reinforcement learning domains: a framework and survey. Journal of Machine Learning Research. 2020. Vol. 21, no. 181. P. 7382–7431. URL: <https://jmlr.org/papers/volume21/20-212/20-212.pdf> (дата звернення: 28.03.2026).
4. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal Policy Optimization Algorithms : препринт. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1707.06347> (дата звернення: 28.03.2026).

СУЧАСНІ ВИКЛИКИ ВПРОВАДЖЕННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ В ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕХНОЛОГІЧНІЙ ОСВІТІ

Унгурян Г.М.

E-mail: g.unhurian@chnu.edu.ua

Яшан Б.О.

E-mail: b.yashan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Інтенсивний розвиток технологій штучного інтелекту (ШІ) істотно впливає на всі сфери людського життя, особливо, на освітній процес. Використання ШІ зумовлює автоматизацію навчання, персоналізацію освітніх траєкторій та, за етичного використання, сприяє підвищенню ефективності отримання знань. У той самий час, інтеграція цих технологій сприяє виникненню низки етичних викликів, зокрема проблеми упередженості алгоритмів, захисту персональних даних користувача, прозорості прийняття рішень і дотримання академічної доброчесності.

У роботі узагальнено ризики використання ШІ та обґрунтовано необхідність відповідального використання студентами у навчальному процесі.

Технології ШІ все частіше виконують роль інтелектуальних помічників та аналітичних інструментів у навчанні, таким чином, замінюючи традиційні

підходи до навчання та оцінювання набутих знань. Водночас такий розвиток породжує різні етичні виклики, що потребують детального дослідження та аналізу.

Однією з важливих проблем є обмежена пояснюваність роботи моделей машинного навчання, так званої концепції «black-box»[1]. Нейронні мережі, які лежать у фундаменті сучасних ІШ, виводять результати на основі опрацювань великої кількості обчислень та алгоритмів, які складно пояснити для сучасного користувача у зрозумілій формі, що створює ризик поверхневого розуміння результату, який отримав студент. Дана проблема суперечить принципам глибокого навчання та розвитку аналітичного мислення.

Водночас, великим ризиком є алгоритмічна упередженість, яка може виникнути внаслідок нерепрезентативності даних чи помилок у їх обробці. В умовах навчального процесу, дана ситуація може призвести до формування некоректних висновків, аналізу, відтворення соціальних стереотипів, а також негативно вплинути на подальшу професійну діяльність через спотворення підходів до роботи з даними.

Сучасні системи ІШ для власного функціонування потребують великих обсягів інформації, що, іноді, може містити персональну або чутливу інформацію. Під час використання ІШ, студенти можуть несвідомо передавати власні конфіденційні дані стороннім сервісам, що може сприяти їх витоку чи несанкціонованому використанню. Саме тому, важливим є формування навичок безпечної роботи та усвідомлення відповідальності при використанні власних даних.

Актуальним питанням є дотримання правил та норм академічної доброчесності при залученні у роботі систем ІШ, оскільки результати можуть бути отримані без конкретного інтелектуального внеску студента. Дана проблема ускладнює можливість коректного оцінювання знань та потребує зміни традиційних підходів до контролю навчальних досягнень, тому важливою є перевірка розуміння конкретного навчального матеріалу, а не тільки кінцевого результату.

Важливим є поняття відповідальності отриманих результатів та висновків, не зважаючи на автономність систем ІШ, вони не можуть розглядатись як суб'єкти, що мають наслідки за їх використання. Будь-які результати, включно із помилковими та дискримінаційними лежать на користувачі, що акцентує необхідність формування у студентів власної значущості у прийнятті висновків при використанні мовних моделей, як у навчанні, так і у повсякденних діях.

Загрози зовнішнього впливу на моделі ІШ та їх вразливість до маніпуляцій вхідними даними чи кібератак є важливим напрямком дослідження, зокрема такі

ризика можуть істотно впливати на коректність та стабільність роботи ШІ, а також змінювати їх поведінку, чи виводити некоректні висновки. Як наслідок, системи ШІ можуть надавати неточні або хибні результати,

Важливим напрямом дослідження є також вразливість систем штучного інтелекту до зовнішніх впливів, зокрема маніпуляцій вхідними даними або кібератак. Такі загрози можуть суттєво впливати на стабільність і коректність роботи моделей, змінюючи їхню поведінку або спотворюючи результати обробки інформації. Унаслідок цього система може видавати неточні або хибні результати, що є особливо небезпечним при формуванні знань та компетентностей студентів, а також розвитку їх критичного мислення. Такі небезпеки викликають сумнів щодо надійності автоматизованих рішень ШІ, які використовуються для підтримки навчального процесу, що наголошує на необхідності розробки дієвих інструментів захисту моделей, перевірки якості та контролю їх роботи.

Отже, використання штучного інтелекту в ІТ-освіті є складним процесом та потребує врахування технологічних, етичних, соціальних та педагогічних факторів. Ефективна імплементація технологій ШІ можлива тільки за умов синергетичного поєднання інноваційних рішень із принципами відповідальності, академічної доброчесності та беззаперечного дотримання прав людини.

Потрібно пам'ятати про масштабний вплив ШІ на освіту, зокрема на процеси навчання та формування компетентностей здобувачів освіти. Використання ШІ здатне підвищувати ефективність засвоєння знань, персоналізувати освітню траєкторію, покращувати аналітичне мислення. Водночас за відсутності чіткого педагогічного контролю, існують небезпеки зниження рівня самостійності, критичного мислення. Проте за відсутності належного педагогічного контролю існує ризик зниження рівня самостійності, когнітивної активності студентів, що посилює значущість необхідності збалансованого наукового підходу до інтеграції систем ШІ у навчання.

Отже, використання ШІ в освіті є незворотнім процесом та потребує здатність освітньої системи забезпечити раціональне поєднання технологічного прогресу із принципами гуманізму та навчально-методичними підходами, що в сукупності забезпечують стале функціонування освітньої системи.

Список використаних джерел:

1. Унгурян Г.М., Яшан Б.О. Проблеми та принципи етичного застосування інструментів штучного інтелекту при вивченні інформаційних технологій студентами. *Актуальні питання у сучасній науці*, 2026. № 2(44). С. 1887 — 1898.

СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ КРИПТОГРАФІЧНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ЇХ РОЛЬ У КІБЕРБЕЗПЕЦІ

Комар Ю.М.

E-mail: komarula89@gmail.com

Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди

Стрімкий розвиток інформаційних технологій, цифрова трансформація суспільства та глобалізація інформаційного простору спричинили суттєве зростання обсягів обробки, передавання та зберігання даних. У таких умовах забезпечення інформаційної безпеки стає одним із ключових завдань сучасних інформаційних систем. Зростання кількості кіберзагроз, несанкціонованих втручань, витоків конфіденційної інформації та кібератак зумовлює необхідність використання ефективних методів захисту даних, серед яких провідне місце займають криптографічні технології. Криптографія виступає фундаментальною складовою кібербезпеки, забезпечуючи конфіденційність, цілісність, автентичність і невідмовність інформації у цифровому середовищі.

Історичний розвиток криптографії демонструє поступовий перехід від простих методів приховування повідомлень до складних математичних алгоритмів захисту інформації. Перші криптографічні системи базувалися на підстановочних і перестановочних шифрах, прикладами яких є шифр Цезаря та поліалфавітні методи шифрування. Основною метою таких підходів було ускладнення прочитання повідомлення сторонніми особами, однак із розвитком математичного аналізу та обчислювальної техніки їх криптостійкість виявилася недостатньою. Новий етап розвитку криптографії розпочався у XX столітті з появою симетричних алгоритмів шифрування, що використовують один секретний ключ для шифрування та дешифрування інформації. Симетрична криптографія характеризується високою швидкістю обробки даних і ефективністю при роботі з великими інформаційними масивами, що зумовило її широке використання у файлових системах, базах даних та мережевих сервісах. Водночас проблема безпечного передавання секретного ключа між сторонами стала суттєвим обмеженням таких систем, що сприяло появі асиметричної криптографії. Асиметричні криптографічні алгоритми базуються на використанні пари взаємопов'язаних ключів — відкритого та закритого. Такий підхід дозволив вирішити проблему розповсюдження ключів і став основою сучасних протоколів захищеного обміну даними, електронного цифрового підпису, електронної комерції та інтернет-банкінгу. Поєднання симетричних і асиметричних методів сформувало сучасну криптографічну інфраструктуру, що

лежить в основі функціонування мережі Інтернет, хмарних технологій, мобільних застосунків та систем електронного урядування [2].

Сучасні інформаційні системи функціонують у динамічному середовищі, де традиційні статичні механізми захисту вже не забезпечують достатнього рівня безпеки. Саме тому одним із ключових напрямів розвитку криптографії є її інтеграція з технологіями штучного інтелекту. Методи машинного навчання та нейронні мережі активно застосовуються для аналізу поведінкових характеристик користувачів, виявлення аномалій мережевого трафіку, автоматичного визначення потенційних вразливостей та прогнозування кіберзагроз. Використання штучного інтелекту дозволяє переходити від реактивних моделей кіберзахисту до проактивних систем, здатних самостійно адаптуватися до змін середовища. Одним із перспективних напрямів є застосування штучного інтелекту у криптоаналізі — процесі дослідження криптографічних алгоритмів з метою оцінки їх стійкості. Алгоритми машинного навчання здатні обробляти великі масиви даних та виявляти приховані статистичні закономірності, що може як підвищувати рівень захисту інформації, так і створювати нові виклики для розробників криптографічних систем. У результаті формується постійне технологічне протистояння між засобами шифрування та методами їх аналізу. Важливою тенденцією сучасного розвитку є поява постквантової криптографії. Активний розвиток квантових обчислень створює потенційну загрозу для класичних криптографічних алгоритмів, стійкість яких базується на складності математичних задач факторизації великих чисел або дискретного логарифмування. Квантові алгоритми можуть суттєво скоротити час розкриття таких шифрів, що стимулює дослідження нових криптографічних підходів, стійких до квантових атак. Постквантові алгоритми розглядаються як основа майбутніх систем інформаційної безпеки [1].

Криптографічні технології сьогодні застосовуються у широкому спектрі сфер: фінансових операціях, електронному документообігу, цифровій ідентифікації особи, інтернеті речей, хмарних сервісах, військових інформаційних системах та критичній інфраструктурі держави. Зростання ролі цифрових платформ підсилює значення криптографії як інструменту формування довіри між користувачами, сервісами та інформаційними системами. Таким чином, сучасна криптографія перебуває на етапі глибокої еволюції, що поєднує математичні методи захисту інформації, інтелектуальні алгоритми аналізу даних та перспективи квантових технологій. Подальший розвиток криптографічних систем пов'язаний зі створенням автономних адаптивних механізмів інформаційної безпеки, здатних забезпечити надійний захист даних у цифровому суспільстві майбутнього.

Список використаних джерел:

1. Кібербезпека в інформаційному суспільстві // Інститут проблем інтелектуальної власності. URL: <https://ippi.org.ua/sites/default/files/2026-2.pdf> (дата звернення: 11.04.2026). С. 98–99.
2. Stallings W. Cryptography and Network Security: Principles and Practice. 7th ed. Pearson, 2017. 768 p.

Прикладна математика

Applied Mathematics

LATENT HIERARCHICAL CAUSAL DISCOVERY IN MENTAL HEALTH DATA

Kateryna Leontieva

Academic advisor: Professor Robin Evans

University of Oxford, Department of Statistics, Lincoln College

Traditional statistical models regularly rely on simplifying assumptions, such as linearity (a direct, proportional relationship between variables) or Gaussianity (the assumption that data follow a normal distribution). These assumptions limit their ability to represent the complexity of real-world systems. Recent machine learning approaches, such as deep generative models (algorithms that approximate complex data sets to generate new data) and differentiable causal discovery (methods that use optimisation to uncover causal relationships between variables), can identify hidden factors without strict parametric constraints. However, these methods may prioritise flexibility over interpretability and reliability, making their results less trustworthy in applied settings [1]. The present study deals with this challenge. It consistently compares classical and modern latent-variable algorithms (techniques that model hidden or unobserved variables to explain observed data) using large-scale mental health survey data.

The main goal of this research is to find the hidden causal structure in the Oxford Trust Mental Health Survey. The survey covers over 10,000 respondents and more than 220 questions. We focus on whether the concepts Worry (Q72), Mistrust A (Q74), Mistrust B (Q75), Negative Self-Belief (Q85), Reasoning Style (Q94), Sleep (Q95–Q100), and Social Anxiety (Q101) are arranged in a hierarchy with higher-level hidden factors or work as separate, independent parts. These constructs were selected because they capture core cognitive and emotional domains relevant to transdiagnostic risk and resilience concerning mental health. Each is represented by thematic item blocks that have undergone prior psychometric validation (i.e., statistical testing to maintain reliability and validity). This selection targets coherent, theoretically meaningful domains most likely to detect underlying causal patterns. It also keeps the methodological scope manageable. We test algorithms for finding hidden hierarchies (IL2H, LiNGLaH), which identify layered structures; independence-based direction (GIN, HSIC), which assesses if relationships among variables are independent; and

stability (bootstrap selection), which evaluates the robustness of results through repeated sampling. We compare these with clear baselines such as factor-analytic summaries and nonparametric factor analysis (NFA), which group related variables based on statistical patterns without assuming their distributions. After quality control, 10,382 complete cases remained. These cases had no missing data in any of the analysed sections. Quality control involved removing responses with very short completion times (meaning the total survey was completed in less than 10 minutes—below the 5th percentile, which was based on the distribution of all recorded times and initial testing of the survey's minimum reasonable completion length) and inconsistent answers (defined as answers with contradictions within repeated or logically connected items, or consistently identical responses to all questions in a set). All items were ranked and standardised before running the algorithms. Table 1 shows that reliability was high for Worry, both Mistrust sections, Defence Mechanisms, and Social Anxiety ($\alpha = 0.878$ – 0.926). It was acceptable for Sleep ($\alpha = 0.792$), but lower for Reasoning Style ($\alpha = 0.674$).

Table 1. Internal consistency of thematic blocks (Cronbach's α) after QC.

Block	Items	Cronbachs α
Worry (Q72)	10	0.912
Mistrust A (Q74)	8	0.878
Mistrust B (Q75)	10	0.926
Defence mechanisms (Q85)	20	0.923
Hallucinations (Q94)	20	0.674
Sleep (Q95–Q100)	4	0.792
Social anxiety (Q101)	17	0.924

The analysis uses four main algorithmic groups. Constraint-based methods (PC, FCI) build causal representations by testing for conditional independence. Score-based GES and hybrid MMHC serve as additional baselines. ICA followed by DirectLiNGAM [2] uses non-Gaussianity to determine causal order. The main analysis relies on IL2H [3]. This method works in three steps. Phase I finds measurement stars using rank-deficiency tests on covariance sub-matrices. Phase II removes false bond-set clusters. Phase III adjusts edge assignments to ensure d-separation. LiNGLaH [3] builds on IL2H by using the Generalised Independent Noise (GIN) condition [4]. This condition tests whether a surrogate $E = \omega^T Y$ is independent of the regressors Z . It uses HSIC with permutation calibration and a Benjamini-Hochberg FDR correction to set the edge direction among latent factors. NFA [5] checks measurement quality using Mokken scaling and row-bootstrap ($B = 200$ resamples). In Phase I of IL2H, stable measurement groups were identified for main blocks: 8–9 of 10 items for Worry (Q72), all 8 items for Mistrust A (Q74), and about 3 for Mistrust B (Q75). Extended blocks

Q85 and Q101 did not yield stable groups, failing the IL2H purity standard despite high Cronbach's α . This illustrates the difference between reliability and latent-variable purity. Figure 1 shows the Phase II measurement graph: three red hidden nodes (L72, L74, L75) link to their respective pure indicator items, with no directed connections remaining among factors, indicating parallel, distinct latent variables.

LiNGLaH orientation tests (which test the directionality of relationships between variables) clearly showed there was no hierarchy. Table 2 presents the results for all three pairs in the main group. The median p-value (a statistic indicating the probability that results occurred by chance) was 0.007 in both directions for each pair. No anchors (reference variables intended to identify systematic differences) showed a consistent imbalance after FDR correction (false discovery rate correction, a method for adjusting for multiple comparisons). GIN block-wise checks (testing for latent variables in subgroups) confirmed that each block had its own hidden factor. The shares of anchors with $p \geq 0.05$ (anchors that did not show a notable imbalance) were 0.70 for Q72, 0.76 for Q74, and 0.64 for Q75

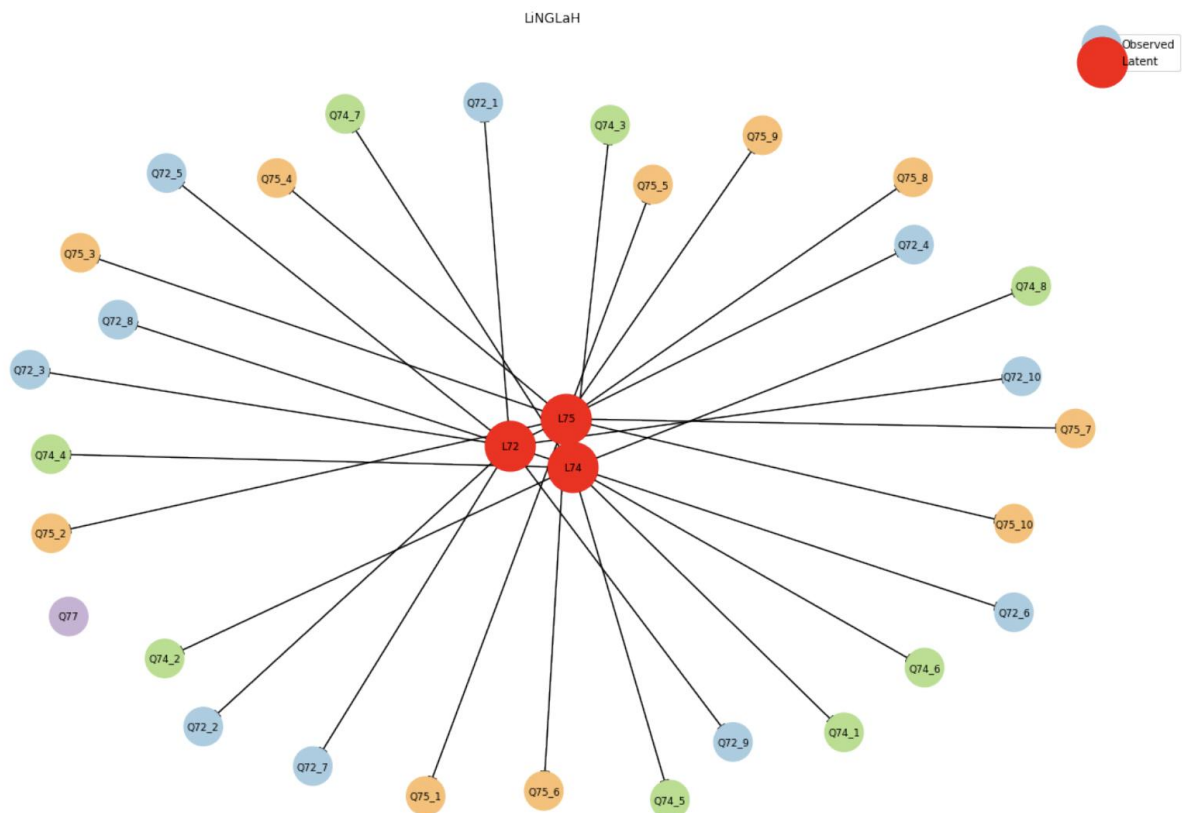


Figure 1. IL2H Phase II measurement graph. Red nodes = latent factors (L72, L74, L75); coloured circles = observed items (blue = Q72, green = Q74, orange = Q75). No directed inter-latent edges survived Phase II, indicating that the latent dimensions are parallel.

Table 2. LiNGLaH/GIN orientation tests among core latent factors. Symmetrical p-values and zero shares in both directions confirm parallel structure.

Pair	med p (A $\rightarrow$ B)	Share	med p (B $\rightarrow$ A)	Share	Conclusion
$L_{72} \leftrightarrow L_{74}$	0.007	0.00	0.007	0.00	Parallel (no robust asym.)
$L_{72} \leftrightarrow L_{75}$	0.007	0.00	0.007	0.00	Parallel
$L_{74} \leftrightarrow L_{75}$	0.007	0.00	0.007	0.00	Parallel

Non-parametric factor analysis, a method that does not rely on assumptions of normality, supported the quality of the measurements. Mokken scale-level strength scores, which measure the reliability and scalability properties of items, were strong for Q72 (Ss = 0.860), Q74 (Ss = 0.836), Q75 (Ss = 0.860), and Q101 (Ss = 0.813). Scores were moderate for Q85 (Ss = 0.802) and only moderate for Q94 (Ss = 0.569). Bootstrap confidence intervals (B = 200), which indicate the accuracy of the scores based on resampling, were narrow for Q72 and Q74. The respective intervals were Hs = 0.846 [0.840, 0.851] and 0.808 [0.802, 0.813]. This shows that the lack of hierarchy is not due to weak measurement. The Jaccard overlap, a statistic measuring the similarity between sets, between IL2H groups and top-Si Mokken sets was 1.00 for Q74, about 0.56 for Q72 and Q75, and only 0.20 for Q94. This fits the mixed content of Q94.

There are three main findings. First, IL2H consistently finds clear hidden measurement groups for Worry and Mistrust, with strong internal consistency confirmed by the bootstrap method. Second, LiNGLaH/GIN orientation tests indicate that there are no stable directional links among the hidden factors, suggesting that the main mental-health concepts in the Oxford Trust Survey function as parallel rather than hierarchical parts. Third, NFA supports this by clarifying item-level nonlinearities and reducing false overlaps, confirming that the lack of hierarchy is not due to poor measurement. These results suggest that treatments for Worry, Mistrust, Sleep, and Social Anxiety can each be justified on their own, rather than focusing only on a single root cause. Future research should apply these methods to nonlinear hidden-variable models and test whether the findings hold across cultures.

References

1. Louizos C., Shalit U., Mooij J., Sontag D., Zemel R., Welling M. Causal effect inference with deep latent-variable models // arXiv. – 2017. – 1705.08821.
2. Shimizu S., Hoyer P. O., Hyvarinen A., Kerminen A. J. A linear non-Gaussian acyclic model for causal discovery // JMLR. – 2006. – Vol. 7. – P. 2003–2030.
3. Huang B., Low C. J. H., Xie F., Glymour C., Zhang K. Latent hierarchical causal structure discovery with rank constraints // arXiv. – 2022. – 2210.01798.
4. Xie F., Cai R., Huang B., Glymour C., Hao Z., Zhang K. Generalised independent noise condition for estimating latent variable causal graphs // arXiv.

- 2020. – 2010.04917.
5. Zheng Y., Liu Y., Yao J., Hu Y., Zhang K. Nonparametric factor analysis and beyond // AISTATS. – 2025. – Vol. 258. – P. 424–432.

MATHEMATICAL APPROACHES TO SOLVING MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS

Syniakina A.V.

E-mail: anzhelika.syniakina@student.karazin.ua

Academic advisor: Revina T.V.

V. N. Karazin Kharkiv National University

Modern mathematical problems increasingly require the simultaneous optimization of multiple criteria. In such cases, classical single-criterion optimization is insufficient because improving one indicator often leads to the deterioration of another. This study applies multi-criteria optimization methods to solve the problem of distributing railway cars among loading points.

Mathematical Model

The problem of distributing railway cars among loading points is formulated based on the model presented in [1]. The task involves distributing 50 railway cars among three loading points with capacities $m_1 = 25$, $m_2 = 28$, $m_3 = 20$ cars. Due to different technical equipment at the loading points, the railway's operating costs for unloading are $C_1 = 20$, $C_2 = 30$, $C_3 = 35$ respectively. Simultaneously, the client tariffs for unloading services are $P_1 = 60$, $P_2 = 55$, $P_3 = 45$.

The variables x_1, x_2, x_3 represent the number of cars assigned to the first, second, and third loading points. The objective is to minimize two conflicting functions: railway operating costs (C) and client payments (P).

$$\begin{aligned} \{x_1 + x_2 + x_3 = 50; x_1 \leq 25 \ x_2 \leq 28 \ x_3 \leq 20 \ x_i \geq 0\} \\ C = 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 \rightarrow \min \\ \Pi = 60x_1 + 55x_2 + 45x_3 \rightarrow \min \end{aligned} \quad (1)$$

Methodology

The study utilizes the **Pareto** optimality principle to exclude dominated solutions and find a set of efficient solutions, based on the model presented in [3]. To implement this approach, a specialized Python script was developed. The algorithm iterates through all feasible distribution options and filters out those that are dominated, ensuring that for each selected solution, no criterion can be improved without degrading another.

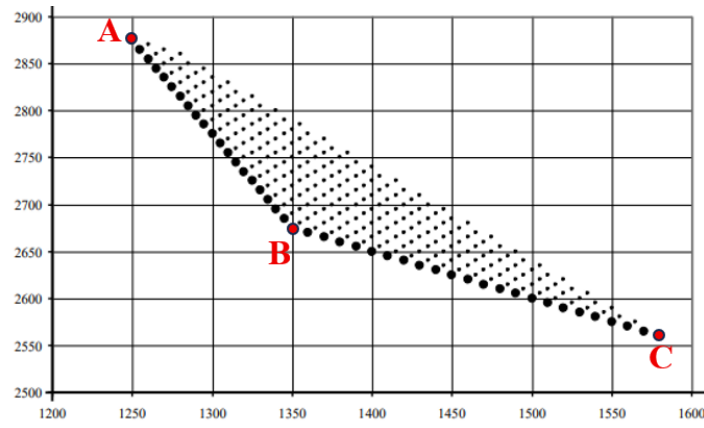


Fig. 1 : Set of Pareto-efficient solutions.

To obtain a single optimal plan, the linear **weighting method** is applied according to the approach described in [4]:

$$F = w_1 \cdot C + w_2 \cdot P \rightarrow \min, \text{ where } w_1 + w_2 = 1 \quad (2)$$

Three methods for determining weight coefficients (w_i) were compared: point allocation, ranking, and pairwise comparison, based on the methodologies described in [5].

Table 1: Comparative analysis of results

Method	Case	Weight coefficients w_1, w_2	Optimal plan (x_1, x_2, x_3)	railway operating costs	Client payments
“Point allocation”	1	0,5; 0,5	(25; 5; 20)	1350	2675
	2	0,8; 0,2	(25; 25; 0)	1250	2875
	3	0,2; 0,8	(2; 28; 20)	1580	2560
“Ranking method”	4	0,67; 0,33	(25; 25; 0)	1250	2875
	5	0,33; 0,67	(2; 28; 20)	1580	2560
“Pairwise comparison”	6	0,75; 0,25	(25; 25; 0)	1250	2875
	7	0,25; 0,75	(2; 28; 20)	1580	2560

To solve the single-criterion optimization problem derived from the linear weighting method, the **simplex method** was used. The analysis of the results presented in Table 1 shows that for both the "Railway Priority" and "Client Priority" strategies, the optimal plans remain identical regardless of the weighting method used.

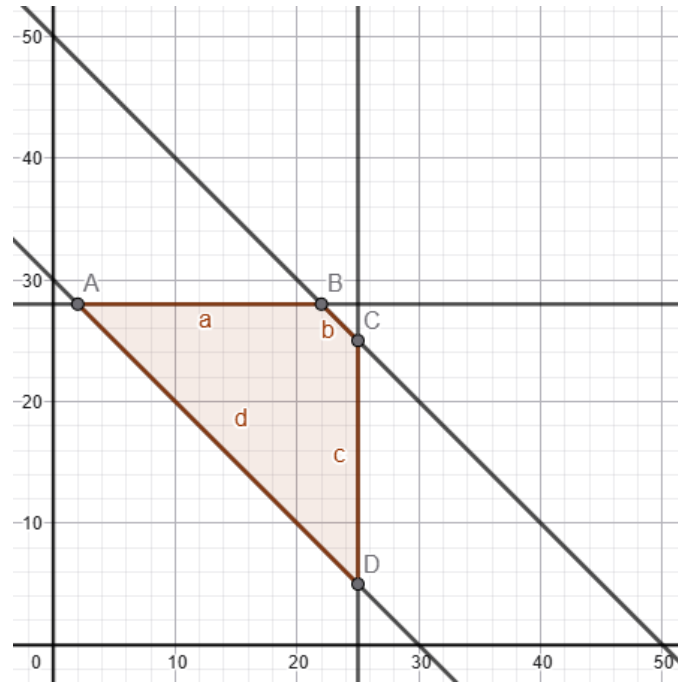


Fig. 2 Graphical representation of the feasible region

The feasible region is constructed as a **convex bounded polyhedron** (Fig. 2). According to the fundamental theorem of linear programming presented in [2], the optimal value of a linear objective function is reached at at least one of the corner points (vertices) of this region. The intersection points A(2, 28), C(25, 25), and D(25, 5) directly correspond to the previously identified optimal plans (2, 28, 20), (25, 25, 0) and (25, 5, 20).

Analysis of the Pareto set revealed that Point B (22, 28, 0) is not optimal, as it is dominated by other solutions and excluded from the efficient set.

It was mathematically proven that a direct transition from a "Railway Priority" strategy (Point A) to a "Client Priority" strategy (Point C) is impossible. The transition occurs only sequentially through a compromise solution (Point D).

Difference functions (Δ) of the objective values are introduced for the plans corresponding to points A and D, as well as D and C. The **critical values** (roots of the functions) are identified by solving for $\Delta = 0$ to determine the points where the optimal plan changes .

$$\Delta_{A-D}(w_1) = F(A) - F(D) = 345w_1 - 115 = 0 \Rightarrow w_1 = \frac{1}{3}$$

$$\Delta_{D-C}(w_1) = F(D) - F(C) = 300w_1 - 200 = 0 \Rightarrow w_1 = \frac{2}{3}$$

The **method of intervals** is applied to these functions to determine the range of the weight coefficient w_1 ($w_1 = 1 - w_2$) for which each plan remains optimal:

$$(2, 28, 20): 0 \leq w_1 \leq \frac{1}{3}$$

$$(25, 5, 20): \frac{1}{3} \leq w_1 \leq \frac{2}{3}$$

$$(25, 25, 0): \frac{2}{3} \leq w_1 \leq 1$$

References:

1. Chybisov Yu. V., Shulha Yu. S. Zastosuvannia metodiv bahatokryterialnoi optymizatsii dlia vyrishennia zadachi rozpodilu vahoniv po vantazhnym frontam. *Transportni systemy ta tekhnolohii perevezen: zb. nauk. prats DNUZT im. akad. V. Lazariana* 2014. Iss. 7. Pp. 65-72. (in Ukrainian)
2. Dantzig G. B. *Linear Programming and Extensions*. Princeton : Princeton University Press, 1963. 640 p.
3. Koopmans T. C. Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. *Activity Analysis of Production and Allocation* / ed. by T. C. Koopmans. New York : John Wiley & Sons, 1951. P. 33–97.
4. Odu G. O., Charles-Owaba O. E. Review of Multi-criteria Optimization Methods – Theory and Applications. *IOSR Journal of Engineering*. 2013. Vol. 3, no. 10. P. 1–14.
5. Odu G. O. Weighting Methods for Multi-Criteria Decision Making Technique. *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*. 2019. Vol. 23, no. 8. P. 1449–1457.

MULTICOMPONENT ANALYSIS OF TIME SERIES BASED ON CO₂ EMISSION DATA

Zaviriukha E.D.

E-mail: elina.zaviriukha@student.karazin.ua

Scientific advisor: Kizilova N.M.

V.N. Karazin Kharkiv National University

Introduction

Climate change remains a serious environmental issue, and rising CO₂ emissions are one of its main drivers. Although many European countries are taking steps to lower emissions, the situation still differs significantly from one country to another.

These differences are linked to economic conditions, industrial structure, and energy policy. For this reason, it is useful not only to compare CO₂ indicators, but also to group countries with similar emission patterns. Cluster analysis makes it possible to identify such groups and detect general trends in the data.

Data Description

The analysis is based on open statistical data from the *Our World in Data* platform, which provides information on CO₂ emissions in European countries. The dataset covers the period 2000–2023 and includes 20 selected European countries. Two key indicators were selected for the study:

- CO₂ emissions per capita;
- total CO₂ emissions per country.

These variables allow a comprehensive comparison of countries by considering both individual and overall emission levels. Each country is represented as a point in a two-dimensional feature space defined by these indicators.

To ensure comparability between variables, the data were standardized using Z-score normalization:

$$Z = \frac{X - \text{mean}(X)}{SD(X)} \quad (1)$$

Methodology

Two clustering approaches were applied in this study: the **k-means method** and **hierarchical clustering using complete linkage**.

The k-means algorithm partitions the dataset into k clusters by minimizing the distances between observations and their corresponding centroids. Each observation is assigned to the nearest cluster center, and the centroids are iteratively updated as the mean values of the assigned points until convergence is achieved.

Hierarchical clustering follows an agglomerative approach, where each observation initially forms its own cluster. At each step, the two clusters with the smallest distance are merged. In this study, the complete linkage method was used, where the distance between clusters is defined as the maximum distance between their elements.

To evaluate the quality of clustering, the **silhouette coefficient** was applied:

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\{a(i), b(i)\}} \quad (2)$$

The silhouette coefficient ranges from -1 to 1, where higher values indicate better cluster separation.

Results and Graphical Representation

To provide an initial overview of the dataset, Fig. 1 and Fig. 2 present the distribution of CO₂ emissions across the selected countries. These diagrams illustrate the differences in both per capita and total emission levels before data normalization.

The clustering results are illustrated in Fig. 3 and Fig. 4, where each country is represented in the feature space defined by normalized CO₂ emissions per capita and total CO₂ emissions.

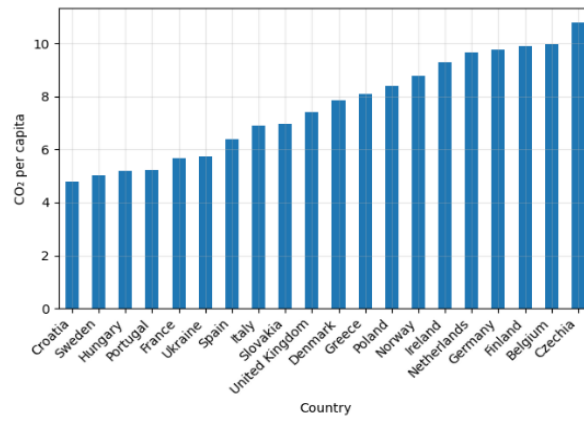


Fig. 1. CO₂ emissions per capita by country

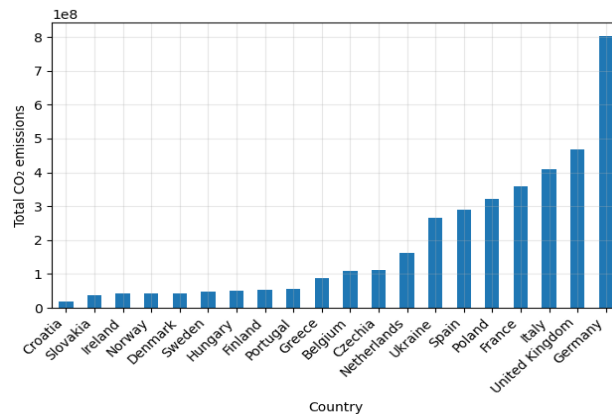


Fig. 2. Total CO₂ emissions by country

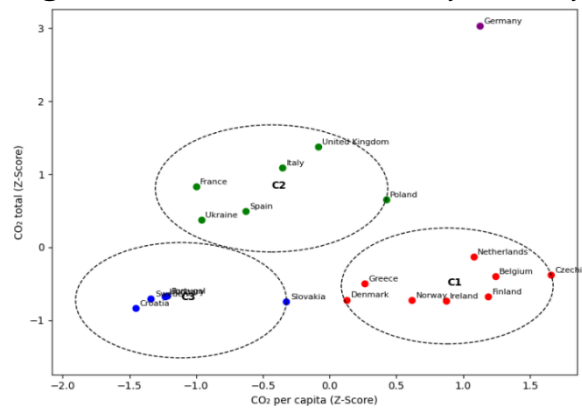


Fig. 3. Clusters of countries (*k*-means method)

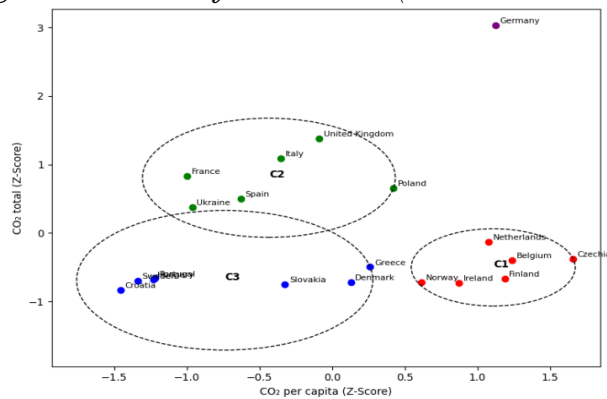


Fig. 4. Clusters of countries (hierarchical method, complete linkage)

Fig. 3. shows the results obtained using the k-means method. Four clusters were identified:

- Cluster 1 includes Belgium, Czechia, Denmark, Finland, Greece, Norway, the Netherlands, and Ireland - countries with medium to high CO₂ emissions per capita and moderate total emissions;
- Cluster 2 consists of Poland, Italy, France, Spain, Ukraine, and the United Kingdom - countries with average emission levels;
- Cluster 3 includes Portugal, Croatia, Hungary, Slovakia, and Sweden - countries with relatively low emissions;
- Cluster 4 is represented by Germany, which forms a separate cluster due to significantly higher total emissions.

Fig. 4 presents the results of hierarchical clustering. The overall cluster structure remains similar, with some differences in the assignment of individual countries. Denmark and Greece belong to Cluster 1 in the k-means method and are assigned to Cluster 3 in hierarchical clustering, indicating that cluster membership may depend on the chosen algorithm.

The silhouette coefficient was used to evaluate clustering quality. The average silhouette score is 0.533 for k-means and 0.460 for hierarchical clustering, indicating that k-means produces more compact and better-separated clusters.

References:

1. Our World in Data. CO₂ and Greenhouse Gas Emissions. URL: <https://ourworldindata.org/co2-and-greenhouse-gas-emissions> (Accessed:14.10.2025)
2. Larose D. Discovering Knowledge in Data. Wiley, 2005. 37 p., 149 p.
3. Tan P.-N. et al. Introduction to Data Mining, 2021. Chapter 7. Pp. 10-14. URL: <https://www-users.cse.umn.edu/~kumar001/dmbook/index.php> (Accessed:17.10.2025).
4. Rousseeuw P.J. Silhouettes: A graphical aid to cluster analysis, 1987. Pp. 55-57. URL: <https://wis.kuleuven.be/stat/robust/papers/publications-1987/rousseeuw-silhouettes-jcam-sciencedirectopenarchiv.pdf> (Accessed:17.10.2025).
5. Tibshirani R. Hierarchical clustering. Data Mining, 2013. 10 p. URL: <https://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/datamining/lectures/05-clus2.pdf> (Accessed:21.10.2025).
6. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Osnovy klasteryzatsii. Lecture No. 11, p. 1. URL: https://csc.knu.ua/media/study/asp/mod_probl_inf_tech_sys_analysis_ivohin/lecture/lec11.pdf (Accessed:17.10.2025). (in Ukrainian).

POPOV CRITERIA FOR STABILITY OF FORCED LUR'E SYSTEMS

Anna Chernikova

E-mail: anna.chernikova@napier.ac.uk

Chris Guiver

E-mail: C.Guiver@napier.ac.uk

Yuyang Zhou

E-mail: Y.Zhou@napier.ac.uk

Academic advisors: Chris Guiver, Yuyang Zhou

Edinburgh Napier University

A large and important class of control systems can be represented as feedback interconnections between a linear dynamical system and a nonlinear element. These are so-called *Lur'e systems* (also written Lurye or Lurie in English). Of particular interest is the question of *absolute stability*: asking whether the closed-loop system remains stable, in some sense, for all nonlinearities belonging to a prescribed class; see, for example, [4]. Absolute stability theory thus addresses robustness with respect to nonlinear uncertainty. The Popov criterion is a celebrated sufficient condition for absolute stability of (unforced) Lur'e systems [6]. The terminology *unforced* refers to the fact that there are no external forcing terms present, with corresponding asymptotic stability concepts. Here, we report recent stability results, established as part of the PhD studies of the first author, in the spirit of the Popov criterion which ensure exponential Input-to-State Stability (ISS) (see, for example, [7]) properties for *forced* Lur'e systems. The proofs of these results will be presented elsewhere.

In state-space form, Lur'e systems between linear time-invariant system, $G(s)$ and memoryless nonlinearity, φ , may be expressed as:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & y(t) &= Cx(t), \\ u(t) &= -\varphi(y(t))\end{aligned}\tag{1}$$

where $x(t) \in R^n$ is the state vector, $u(t) \in R^p$ is the control input, and $y(t) \in R^m$ is the measured output. The matrices $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times p}$, and $C \in R^{m \times n}$ describe, respectively, the system dynamics, the input influence, and the output mapping. The corresponding transfer function from input u to output y is given by:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B\tag{2}$$

which provides a frequency-domain representation of the underlying linear system's input-output dynamics.

We assume that A is asymptotically stable, and $\varphi(\cdot): R^m \rightarrow R^m$ is locally Lipschitz, time-invariant nonlinearity satisfying the following sector restriction:

$$0 \leq \varphi(y)^\top (Ky - \varphi(y)) \quad \forall y \in R^m, \quad (3)$$

where K is symmetric positive definite. We introduce the so-called Popov multiplier:

$$Z(s) = K^{-1} + (1 + \alpha s)G(s), \quad \alpha \in R^{m \times m} \quad (4)$$

Definition 1. A rational function $G(s)$ is said to be *positive real (PR)* if:

$$\operatorname{Re}\langle G(s)z, z \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C^n, \forall s \in C_0 \setminus \Sigma_G \quad (5)$$

where every point in Σ_G is a pole or essential singularity of G . Alternatively, (Form.5) can be expressed in the form $\operatorname{He}(G(s)) := \frac{1}{2}(G^*(s) + G(s)) \geq 0$.

Definition 2. The function G is called *strongly positive real* if there exists $\delta > 0$ such that $\operatorname{He}(G(s)) \geq \delta I, \forall s \in C_0 \setminus \Sigma_G$.

The Popov criterion was first developed for Lur'e systems with scalar nonlinearities ($m = 1, \varphi: R \rightarrow R$). The natural extension is to the diagonal case, meaning K, α and φ are diagonal (also called decoupled), and was treated in [5]. We now consider general nondiagonal case for multi-input multi-output system (MIMO) with $m \in N$.

The following results (Lemma 3, Theorem 4, Theorem 5) are based on the work [3]. During our analysis, an inconsistency was identified in Lemma 1 of that work. The lemma and theorems were subsequently revised and corrected. Based on the corrected result, the corresponding stability conditions were further extended to forced Lur'e systems (Theorem 7), yielding new ISS-type results for the nondiagonal sector case.

Lemma 3. Let $K \in R^{n \times n}$ be positive definite and symmetric, $\alpha \in R^{n \times n}$ be symmetric, Λ_-, Λ_+ be positive semi-definite and such that $\alpha = \Lambda_+ - \Lambda_-$. Define

$$M_0(P) = [A^\top P + PA \quad PB \quad B^\top P \quad 0]$$

$$M_1 = [0 \quad -C^\top \quad -C \quad -2K^{-1}]$$

$$M_2 = -[0 \quad A^\top C^\top \alpha \quad \alpha C A \quad \alpha C B + B^\top C^\top \alpha]$$

$$M_3 = \operatorname{He}([A^\top C^\top (\Lambda_-)^{1/2} K (\Lambda_-)^{1/2} C \quad 0 \quad B^\top C^\top (\Lambda_-)^{1/2} K (\Lambda_-)^{1/2} C \quad 0])$$

And formulate the following statements:

- A. There exists some symmetric $P_a > 0$ such that $M_0(P_a) + M_1 + M_2 < 0$.
- B. There exists some symmetric $P_b > 0$ such that $M_0(P_b) + M_1 + M_2 + M_3 < 0$
- C. For all $\omega \in R$: $\operatorname{He}[K^{-1} + (I + j\omega\alpha)G(j\omega)] > 0$

Then a) and c) are equivalent, b) implies a) and, as the result, c).

Theorem 4. Let the static nonlinearity $u(t)$ from (Form.1) be subjected for the sector bound (Form. 3) for some symmetric positive $K \in R^{n \times n}$. Let N be a set of positive semi-definite $N \in R^{n \times n}$ satisfying:

1. $I \in N$,
2. the inequality $\varphi(y)^\top \alpha^{1/2} (K^{-1} \alpha^{1/2} \varphi(y) - \alpha^{1/2} y) \leq 0$ holds for all y ,

3. there exists some continuous $\Phi_\alpha: R^n \rightarrow R$ such that $\alpha\varphi(y) = \nabla\Phi_\alpha$ (or equivalently $\Phi_\alpha(y) = \int_0^y \varphi(\tau)^\top \alpha \, d\tau$)

Suppose that condition (Lemma 3, b)) is satisfied for some $\alpha = \Lambda_+ - \Lambda_-$ with $\Lambda_-, \Lambda_+ \in N$ and with M_0, M_1, M_2 and M_3 defined as in (Lemma 3). Then

$$V_b(x) = x^\top (P_b + C^\top (\Lambda_-)^{1/2} K (\Lambda_-)^{1/2} C) x + 2\Phi_{\Lambda_+}(Cx) - 2\Phi_{\Lambda_-}(Cx)$$

is a Lyapunov function for the system (Form.1) in the nondiagonal setting. If we impose stricter conditions, then we arrive at a more elegant result:

Theorem 5. Let the static nonlinearity $u(t)$ from (Form.1) be subjected for the sector bound (Form. 3) for some symmetric positive definite $K \in R^{n \times n}$. Let N be a set of positive semi-definite $N \in R^{n \times n}$ satisfying conditions 1, 2 and 3 of the Theorem 6. Suppose further:

4. the condition (Lemma 3, b)) is satisfied for some $\alpha = \Lambda_+ - \Lambda_-$ with $\Lambda_-, \Lambda_+ \in N$ and $\Lambda_+ \Lambda_- = 0$; therefore, there is some symmetric $P_a = P_a^\top > 0$ satisfying (Lemma 3, a)) with the same α (with M_0, M_1, M_2 and M_3 defined as in (Lemma 3)).
5. K and N commute for any $N \in N$.

Then

$$V_a(x) = x^\top P_a x + 2\Phi_{\Lambda_+}(Cx) - 2\Phi_{\Lambda_-}(Cx)$$

is a Lyapunov function for the system (Form.1) in the nondiagonal setting.

For locally essentially bounded $v: R_+ \rightarrow R^q$ representing an external forcing or control term, let us consider now the so-called forced Lur'e system:

$$\dot{x} = Ax - B\phi(Cx) + B_e v, \quad x(0) = 0 \quad (6)$$

for $B_e \in R^{n \times q}$ and integer q . The stability concept we consider for the forced Lur'e system (Form.6) is so-called exponential Input-to-State Stability.

Definition 6 ([2]). The system (Form. 8) is said to be exponentially input-to-state stable (ISS) if there exist positive constants L and λ such that every trajectory (v, x) of (Form. 8) satisfies

$$|x(t + \tau; u)| \leq L(e^{-\lambda t} |x(\tau)| + |u|_{L^\infty(\tau, t+\tau)}) \quad \forall t, \tau \geq 0. \quad (7)$$

The following result is our main contribution of the Abstract, and states that the hypotheses for (Theorem 4) are themselves sufficient for exponential ISS.

Theorem 7. Imposing the notation and assumptions of Theorem 4, then (Form. 6) is exponentially input-to-state stable.

A future line of enquiry is to generalise (Theorem 7) to Lur'e differential inclusions, specifically with set-valued nonlinearities, which may be used to model discontinuous systems (corresponding to certain friction types) or systems with hysteresis. Some initial work in this direction appears in [1].

References:

1. De Bruin, J. C. A., et al. Control of mechanical motion systems with non-collocation of actuation and friction: A Popov criterion approach for input-to-state stability and set-valued nonlinearities. *Automatica* 45.2 (2009): 405-415.
2. Guiver C, Logemann H. The exponential input-to-state stability property: characterisations and feedback connections. *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 35.2 (2023): 375-398.
3. Heath W. P, Li G. Lyapunov functions for the multivariable Popov criterion with indefinite multipliers *Automatica* 45.12 (2009): 2977-2981.
4. Khalil, H. K. *Nonlinear systems*. Third edn. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
5. Park P. A revisited Popov criterion for nonlinear Lur'e systems with sector-restrictions. *International Journal of Control* 68.3 (1997): 461-470.
6. Popov, V. M. 1962. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Autom. Remote Control*, 22(8), 857–875
7. Sontag, E. D. *Input to state stability: Basic concepts and results*. *Nonlinear and optimal control theory*. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 163–220 pp.

THE STABLE MATCHING PROBLEM

Kovalenko Mariia

E-mail: mariia.kovalenko@student.karazin.ua

Academic advisor: Revina Tetiana

V. N. Karazin Kharkiv National University

Technical University of Berlin

The report presents the stable matching problem (SMP), which considers a set of N men and N women, where each participant ranks members of the opposite sex based on their personal preferences. The objective is to construct a matching with no blocking (unstable) pair, that is, no man and woman who both prefer each other to their assigned partners [2]. The relevance of this topic lies in its fundamental role for market design and resource allocation, for which Lloyd Shapley and Alvin Roth received the Nobel Prize in Economics in 2012.

The main part of the report is devoted to the Gale-Shapley algorithm, a standard method for finding a stable solution. The algorithm's operation is described using the following formal steps:

1. Each man makes a proposal to the woman who ranks first on his list of preferences.
2. If the man is the woman's top choice, she responds "yes". If he ranks lower, she gives a tentative "maybe" response.

3. If a woman receives multiple proposals, she chooses the best one according to her preferences, responding “yes” or “maybe” to the desired candidate and rejecting all others.
4. Men who have been rejected propose to the next woman on their list. Men who receive a “maybe” response take no further action at this stage.
5. If a woman later receives a proposal from a man who is higher on her list of preferences than her current tentative partner, she rejects the previous suitor and responds “yes” or “maybe” to the new better-ranked candidate.
6. These steps are repeated until there are no men left who are willing or able to make further proposals. At this stage, all “maybe” answers become final “yes” answers, and the algorithm ends.

It is shown that this algorithm terminates and always produces a stable matching. Moreover, the resulting matching is optimal for the proposing side, meaning that each proposer receives the best partner achievable in any stable matching [3]. To demonstrate the practical application of these steps, the report contains a detailed description of a 4x4 example (4 men and 4 women) (Table 1).

Table 1: Lists Of Preferences

	1	2	3	4
Alex	Yana	Ira	Dasha	Olga
Bohdan	Olga	Ira	Dasha	Yana
Chris	Yana	Olga	Dasha	Ira
Dmytro	Olga	Dasha	Ira	Yana

	1	2	3	4
Yana	Bohdan	Chris	Alex	Dmytro
Ira	Alex	Dmytro	Chris	Bohdan
Dasha	Chris	Alex	Dmytro	Bohdan
Olga	Dmytro	Bohdan	Chris	Alex

This example illustrates step-by-step proposals and responses to them and shows how iterative “tentative” commitments eventually stabilize into a final optimal match for all participants (Table 2).

Table 2: Resulting Pairs

Alex (Rank 1 for Ira)	Ira (Rank 2 for Alex)
Bohdan (Rank 4 for Dasha)	Dasha (Rank 3 for Bohdan)
Chris (Rank 2 for Yana)	Yana (Rank 1 for Chris)
Dmytro (Rank 1 for Olga)	Olga (Rank 1 for Dmytro)

In addition, a program code on python was written to implement this algorithm. The implementation corresponds to a complexity of $O(N^2)$ [4], which makes it efficient enough for moderate-sized cases while maintaining the simplicity of the logic. Besides the classic version in which men make proposals, the report also considers an example in which women take the initiative to make proposals, emphasizing how the optimal matching (Table 3) changes accordingly.

Table 3: Women-Proposing Resulting Pairs

Yana (Rank 4 for Bohdan)	Bohdan (Rank 1 for Yana)
Ira (Rank 2 for Alex)	Alex (Rank 1 for Ira)
Dasha (Rank 3 for Chris)	Chris (Rank 1 for Dasha)
Olga (Rank 1 for Dmytro)	Dmytro (Rank 1 for Olga)

References:

1. G. O'Malley, Algorithmic Aspects of Stable Matching Problems, PhD thesis, University of Glasgow, 2007, Chapter 1, pp. 1–25.
2. Lloyd Shapley. Wikipedia: The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lloyd_Shapley (Accessed: 12.03.2026).
3. MIT, Stable Matching, course notes (2015), Section 11.6, pp. 1–8.
4. Stable Matching Problem. Wikipedia: The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_matching_problem (Accessed: 12.03.2026).

АВТОМАТИЗАЦІЯ АНАЛІЗУ ЗВІТНИХ ДАНИХ ЩОДО РОЗПОДІЛУ І ВИКОНАННЯ НАВЧАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ PYTHON ТА DBMS

Овдієнко Андрій Володимирович

E-mail: ovdiienko.a22@365.dnu.edu.ua

Верба Ольга Віталіївна

E-mail: verba@365.dnu.edu.ua

Науковий керівник: Єгошкін Данило Ігорович

E-mail: KnightDanila@i.ua

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, факультет

Прикладної математики, Спеціальність 113

Автоматизація охоплює різні рівні систем - від локальних автоматизованих робочих місць до комплексних систем управління, що використовуються в різних сферах: промисловості, медицині, науці та освіті.[1]

Python – сховище бібліотек. На ньому можна й писати маленькі програми, і аналізувати дані, графічний інтерфейс дуже простий для написання. Python має широке охоплення професіоналів. Деякі мови використовуються переважно для backend, frontend або мобільної розробки, а Python є універсальним інструментом для розробників, фахівців з обробки даних, дослідників та інших. Він як швейцарський ніж серед мов програмування - універсальний і зручний майже для будь-якого завдання.[2]

SQL (Structured Query Language) - це мова структурованих запитів, що використовується для управління та маніпулювання реляційними базами даних.[3]

Проблеми SQL:

1. Повторювані рядки;
2. Невизначені значення;
3. Явна вказівка порядку колонок зліва направо;
4. Колонки без імені та імена колонок, що дублюються;
5. Відсутність підтримки якості «=»;
6. Використання покажчиків;
7. Висока надмірність.[4]

SQLite - це компактна, вбудована реляційна база даних з відкритим кодом. Вона має багато переваг, серед яких простота інтеграції без необхідності налаштування окремого серверу бази даних. SQLite не потребує додаткового серверного програмного забезпечення, і вся база є одним файлом, що полегшує зберігання та управління даними. Користувачеві це дуже зручно, оскільки не потрібно запускати окремий сервер бази даних і потім відключати його після роботи програми. Вся система працює без зайвих налаштувань, що спрощує процес розробки і підвищує ефективність.[5]

Робимо додаток для навчального відділу, який вирішує наступні проблеми:

- Продукт автоматизує роботу деканату.
- Розраховує ставки за перший/другий семестр та навчальний рік за датами та ставками до них.
- Розраховує загальне навчальне навантаження за перший та другий семестри з видами навчальних навантажень та годин, а також автоматично розраховує річні години.
- Зчитує, скільки навчальних годин було заплановано, розраховує, наскільки людина недовиконала або перевиконала план.
- Перевіряє, чи виконує особа частку ставки в межах своєї ставки.
- Перевіряє, чи виконує особа частку ставки в межах своєї ставки при зниженні навчального навантаження.

- Перевіряє, чи читає асистент лекції, що заборонено.
- Перевіряє, чи керує асистент кваліфікаційною роботою, що заборонено.
- Перевіряє, чи приймає асистент іспити, що заборонено.
- Перевіряє, чи проводить асистент консультації перед іспитами, що заборонено.
- Перевіряє, чи керує старший викладач кваліфікаційною роботою, що заборонено.
- Перевіряє, чи читає старший викладач лекції без дозволу вченої ради, що заборонено.
- Обчислює середнє навчальне навантаження НПП по факультетам та кафедрам.
- Обчислює середнє навчальне навантаження ПП по факультетам та кафедрам.
- Обчислює середнє лекційне навчальне навантаження НПП по факультетам та кафедрам.
- Обчислює середнє лекційне навчальне навантаження ПП по факультетам та кафедрам.
- Обчислює середнє аудиторне навчальне навантаження НПП по факультетам та кафедрам.
- Обчислює середнє аудиторне навчальне навантаження ПП по факультетам та кафедрам.
- Обчислює кількість годин, які може читати певна особа при наданому проміжку і ставці роботи.

Це необхідно для спрощення роботи навчального відділу, зменшення їхнього робочого навантаження, щоб вони могли займатися важливішими справами, та перенесення цих операцій на комп'ютер. А оскільки всі ці дії виконує машина, вплив людського фактора втрачається, а це означає, що результати є точнішими та дуже швидкими.

Список використаних джерел:

1. Ковальова В., Михайленко Д., Куц Н. Особливості реалізації процесу автоматизації діловодства на підприємствах України. Проблеми сучасних трансформацій. Серія: економіка та управління. 2025. № 17.
2. Суліма С., Єрмолаєв О. Метод оптимізації SQL запитів системи управління базами даних. Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. 2023. № 2 (72). С. 151–157.
3. Сергєєв Є., Каштальян А., Ковальчук В., Савенко О., Іванченко О. Ефективність і вдосконалення SAST у контексті SQL injection вразливостей. Information Technology: Computer Science, Software

- Engineering and Cyber Security. 2024. С. 149–158.
4. Трейтяк Д. Мова програмування Python як інструмент у науково-педагогічній діяльності. Information Technologies and Learning Tools. 2025. Vol. 107, № 3. С. 168–181.
 5. Kadyrkulova N., Zheenbekov N. Using the SQLite module to create databases with Python. Bulletin of Science and Practice. 2026. № 12. P. 84–88.

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ОПТИМАЛЬНИХ ТРАЄКТОРІЙ ТА ЧАСУ РУХУ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ МОДЕЛІ ГРУШИНА

Дуда Дар'я Вікторівна

E-mail: daria.duda@student.karazin.ua

Науковий керівник: Ігнатович Світлана Юріївна

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Вступ

Робота присвячена дослідженню задач оптимального керування для нелінійних систем. Такі моделі відіграють ключову роль для задач логістики та автоматизації, коли об'єкт змушений підлаштовувати свою траєкторію, наприклад, при маневруванні судна в зонах зі складною течією або при русі колісного робота по поверхні з різною якістю покриття, де здатність до повороту залежить від його положення.

Об'єктом дослідження є керована система, що є узагальненням моделі площини Грушина, де швидкість зміни однієї з координат має степеневу залежність від стану системи. Метою роботи є аналітичний опис оптимального розв'язку та дослідження геометричних властивостей сімейства оптимальних кривих. Зауважимо, що такі системи останнім часом активно досліджуються з різних точок зору [1–3].

Постановка задачі

Розглянемо задачу швидкодії для двовимірної нелінійної системи з параметром $k \in \mathbb{N}$:

$$\{\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1^k u_2$$

з граничними умовами та обмеженням на керування:

$$x(0) = 0, \quad x(\theta) = x^0, \quad u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1, \quad t \in [0, \theta], \quad \theta \rightarrow \min.$$

Для дослідження застосуємо принцип максимуму Понтрягіна [4]. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$H = \psi_1 u_1 + \psi_2 x_1^k u_2,$$

а відповідна спряжена система записується як

$$\{\dot{\psi}_1 = -k\psi_2 x_1^{k-1}(t)u_2(t), \quad \dot{\psi}_2 = 0.$$

Застосування методу множників Лагранжа для максимізації функції Гамільтона-Понтрягіна на одиничному колі $u_1^2 + u_2^2 = 1$ дозволило встановити нам, що оптимальне керування є неперервно-диференційовною функцією.

В роботі показано, що оптимальний рух не передбачає перетину осей координат, оскільки вихід за межі квадранта спричинив би розрив керування, що суперечить умовам оптимальності.

Введення фазового кута $\xi(t)$ дозволило параметризувати керування як

$$\{u_1(t) = \cos(\xi(t)), u_2(t) = \sin(\xi(t)),$$

і звести задачу до розв'язання системи диференціальних рівнянь:

$\{\dot{x}_1 = \cos(\xi), \quad \dot{x}_2 = x_1^k \sin(\xi), \quad \dot{\xi} = ckx_1^{k-1}, \quad x_1(0) = x_2(0) = \xi(0) = 0,$
де $c = -\frac{\psi_2}{2\lambda}$. Шляхом відокремлення змінних отримуємо співвідношення $\sin(\xi) = cx_1^k$, яке визначає криву точок повороту: перетин цієї кривої супроводжується зміною знаку $\dot{x}_1(t)$.

Геометричне місце точок повороту утворює криву γ , рівняння якої ми знайшли аналітично за допомогою спеціальних функцій:

$$x_2 = \alpha x_1^{k+1}, \quad \text{де} \quad \alpha = \frac{1}{2k} B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right),$$

а $B(x, y)$ – бета-функція Ейлера. Відповідний момент досягнення точки повороту визначається як

$$\hat{t} = \frac{B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right)}{2kc^{\frac{1}{k}}}.$$

Залежно від положення кінцевої точки x^0 відносно кривої γ , ми розбили задачу швидкодії на два класи, для кожного з яких отримали точні рівняння для визначення невідомого параметра c та оптимального часу θ . Оскільки в довільний момент часу траєкторія може не досягати точки повороту, для опису системи застосували неповну бета-функцію $B_z(x, y)$.

Випадок 1: кінцева точка x^0 лежить нижче кривої γ .

Рух відбувається без зміни напрямку вздовж осі x_1 .

Невідомий параметр знайшли, як корінь нелінійного рівняння:

$$c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0 = \frac{1}{2k} B_{c^2(x_1^0)^{2k}}\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right), \quad c \in (0, \frac{1}{(x_1^0)^k}].$$

Оптимальний час руху становить:

$$\theta = \frac{1}{2kc^{\frac{1}{k}}} B_{c^2(x_1^0)^{2k}}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right).$$

Випадок 2: кінцева точка x^0 лежить вище кривої γ .

Рух включає проходження через точку повороту.

З міркувань симетрії фазового портрета системи, рівняння для параметра c набуває вигляду:

$$c^{1+\frac{1}{k}}x_2^0 = \frac{1}{2k} \left(2B \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} \right) - B_{c^2(x_1^0)^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Оптимальний час у цьому випадку обчислюється за формулою:

$$\theta = \frac{1}{2kc^{1+\frac{1}{k}}} \left(2B \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2} \right) - B_{c^2(x_1^0)^{2k}} \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Висновки:

У роботі повністю розв'язано задачу швидкодії для узагальненої задачі площини Грушина. Це вдалося зробити завдяки застосуванню принципу максимуму Понтрягіна та бета-функцій Ейлера. Ми отримали аналітичні рівняння для знаходження оптимальних керувань, побудови фазових траєкторій та обчислення мінімального часу переходу системи в довільну задану точку площини для будь-якого натурального показника k .

Список використаних джерел:

1. Adamowicz T., Walicki M., Warhurst B. Harmonic mappings on Grushin planes. *Journal of Differential Equations*. – 2026. – Vol. 453, No. 113806.
2. Albert M., Borza S., Gordina M. Geodesics on Grushin spaces. Preprint. – 3 Sep. 2025. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.03411> (Дата звернення: 18.03.2026)
3. Borza S. Distortion Coefficients of the α -Grushin Plane. *Journal of Geometric Analysis*. – 2022. – Vol. 32, No.78.
4. Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley Interscience, 1962.

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ БАЙЄСІВСЬКИХ ІГОР У STARCRAFT 2

Найдьон І.О

E-mail: illia.naidon@student.karazin.ua

Науковий керівник: Ревіна Т.В.

Харківський національний університет ім. Каразіна

Вступ. StarCraft 2 — комп'ютерна гра (real-time-strategy), яка являє собою приклад гри з неповною інформацією. У роботі розглядається формалізація StarCraft 2 як байєсівської гри, застосування представлення Зелтена для зведення задачі до стандартної стратегічної форми, аналіз оптимальних стратегій на основі статистичних даних.

Байєсівська гра. Гра з неповною інформацією — це гра, в якій деякі гравці мають приватну інформацію, недоступну іншим. Початкова приватна інформація гравця називається його типом. Байєсівська гра, запропонована Харсані у 1967–1968 рр. [1, 2], визначається кортежем:

$$\Gamma = \langle N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) \rangle,$$

де $N = \{1, \dots, n\}$ — множина гравців; Θ_i — простір типів гравця i ; S_i — множина дій; $p_i(\cdot|\theta_i)$ — функція переконань щодо типів інших гравців; $u_i : \Theta \times S \rightarrow \mathbb{R}$ — функція виграшу. Стратегія гравця i — відображення $s_i : \Theta_i \rightarrow S_i$, тобто призначення дії для кожного можливого типу.

За вивчення Байєсівських ігор у 1994 році John Harsanyi, John Nash та Reinhard Selten отримали Нобелівську премію.

Рівноважною концепцією є байєсівська рівновага Неша — профіль стратегій, за якого жоден гравець не може покращити свій очікуваний виграш одностороннім відхиленням.

Представлення Зелтена

Selten's type agent representation — інструмент, що дозволяє перетворити байєсівську гру на еквівалентну гру у стратегічній формі з повною інформацією [3]. Ключова ідея: замість n гравців з різними типами вводимо окремого «агента» для кожної пари (гравець, тип).

Гра Зелтена Γ^s будується таким чином:

- Множина агентів: $N^s = \bigcup_{i \in N} \theta_i$ — кожен тип кожного гравця стає окремим гравцем;
- Дії: кожен агент θ_i має ті самі дії що й гравець i , тобто $S^{\theta_i} = S_i$;
- Виграш агента θ_i — умовне математичне сподівання виграшу гравця i :

$$U_i^{\theta_i}(s_i^{\theta_i}, s_{-i}^{\theta_i}) = \sum \{t_{-i} \in \Theta_{-i}\} p_i(t_{-i}|\theta_i) \cdot u_i(\theta_i, t_{-i}, s_i^{\theta_i}, s_{-i}^{\theta_i}),$$

де $-i$ позначає всіх гравців, крім гравця i .

Байєсівська рівновага Неша оригінальної гри визначається як звичайна рівновага Неша гри Зелтена: профіль $(s_1^*(\cdot), \dots, s_n^*(\cdot))$ є рівноважним тоді і тільки тоді, коли для кожного i , кожного θ_i та кожного $s_i \in S_i$:

$$U_i^{\theta_i}(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^{\theta_i}) \geq U_i^{\theta_i}(s_i, s_{-i}^{\theta_i})$$

Приклад. Розглянемо гру ціноутворення двох компаній [3]. Компанія 1 виробляє x_1 (тип загальновідомий: $\Theta_1 = \{x_1\}$). Компанія 2 виробляє x_2 або y_2 — приватна інформація ($\Theta_2 = \{x_2, y_2\}$). Кожна обирає низьку (a) або високу (b) ціну. Переконання компанії 1: $p_1(x_2|x_1) = 0.6$, $p_1(y_2|x_1) = 0.4$.

Таблиця 1. Виграші при $\theta_2 = x_2$ та $\theta_2 = y_2$

$\theta_2 = x_2$	a_2	b_2
a_1	1, 2	0, 1
b_1	0, 4	1, 3

$\theta_2 = y_2$	a_2	b_2
a_1	1, 3	0, 4
b_1	0, 1	1, 2

Представлення Зелтена: $N^s = \{x_1, x_2, y_2\}$. Виграш агента x_1 обчислюється як зважена сума:

$$U^{x_1}(a_1, a_2, a_2) = 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 1 = 1.0, \quad U^{x_1}(a_1, a_2, b_2) = 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 = 0.6$$

$$U^{x_1}(b_1, a_2, b_2) = 0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 1 = 0.4, \quad U^{x_1}(b_1, a_2, a_2) = 0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0 = 0.0$$

Аналіз домінування у грі Зелтена: при $\theta_2 = x_2$ стратегія a_2 суворо домінує b_2 ; при $\theta_2 = y_2$ — навпаки, b_2 домінує a_2 . Компанія 1, порівнюючи $U^{x_1}(a_1, a_2, b_2) = 0.6 > U^{x_1}(b_1, a_2, b_2) = 0.4$, обирає a_1 . Єдина чиста байєсівська рівновага:

$$s^* = (s^*(x_1) = a_1, \quad s^*(x_2) = a_2, \quad s^*(y_2) = b_2)$$

Отже, окремий аналіз кожної матриці окремо дав би різні результати. Лише спільний байєсівський аналіз через гру Зелтена дає коректну відповідь.

Пошук рівноваги у загальному випадку здійснюється алгоритмом перебору носіїв (support enumeration). Для кожної підмножини стратегій складається система рівнянь байдужості — умова, що очікуваний виграш від усіх активних стратегій однаковий — та рівняння нормування. Якщо система має розв'язок з невід'ємними ймовірностями, і стратегії поза носієм не дають вищого виграшу, знайдено рівновагу. Якщо жоден носій не підходить — перевіряється домінування і задача зводиться до меншої матриці.

StarCraft 2 як байєсівська гра

StarCraft 2 природно описується як байєсівська гра. Гравці знають власну расу та стратегію, але не знають точної стратегії суперника, особливо на початку гри. Туман війни (механіка гри, яка приховує деталі місцевості та ворожі війська) відповідає умові гри з неповною інформацією, а оновлення переконань після розвідки — байєсівському оновленню за формулою Баєса.

Формально задаємо:

- $N = \{1, 2\}$ — два гравці.
- $\Theta_i = \{T, Z, P\} \times \{\text{Агресія, Економіка, Технологія}\}$ — тип гравця: раса та початкова стратегія (9 комбінацій).
- S_i — стратегічні рішення впродовж матчу.
- $p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ — апіорний розподіл, оцінений з аналізу статистики Aligulas як частота використання кожної стратегії у конкретному матчі.

- $u_i(\theta, s) \in \{0, 1\}$ — перемога або поразка.

Представлення Зелтена для матчупу ZvP: кожна комбінація (раса, стратегія) стає окремим type agent. Виграш агента (Z, Агресія) обчислюється як:

$$U_{\{(Z, \text{Агр})\}} = \sum_j p(P_j) \cdot \text{Win}(Z_{\text{Агр}} \text{ vs } P_j)$$

де $\text{Win}(Z_{\text{Агр}} \text{ vs } P_j)$ — емпірична частота перемог Zerg з агресивним відкриттям проти стратегії j Protoss.

Мною були проаналізовані бази даних [4] Allgulac та [5] Spawning Tool для отримання наближених відсотків перемог, частот використання стратегій. Ці дані ми будемо використовувати нище.

Таблиця 2. Матриця winrate для ZvP (ймовірність перемоги Zerg)

Zerg \ Protoss	P-Агресія	P-Економіка	P-Технологія
Z-Агресія	0.50	0.56	0.52
Z-Економіка	0.47	0.49	0.51
Z-Технологія	0.49	0.53	0.50

Застосовуючи support enumeration до цієї матриці, встановлено, що стратегія Економіка для Zerg суворо домінується Агресією по всіх трьох стовпцях: $0.50 > 0.47$, $0.56 > 0.49$, $0.52 > 0.51$. Аналогічно, стратегія Технологія також суворо домінується Агресією: $0.50 > 0.49$, $0.56 > 0.53$, $0.52 > 0.50$. Після видалення обох домінованих стратегій задача зводиться до матриці 1×3 , рівновага якої є чистою: Zerg обирає Агресію, Protoss обирає Агресію зі значенням гри $v = 0.50$.

Порівняння теоретичних рівноваг з емпіричними даними

Знайдена рівновага є чистою: обидва гравці обирають Агресію з імовірністю 1. Теоретичний розподіл стратегій для Zerg: $Q = (Q_{\text{Агр}}, Q_{\text{Еко}}, Q_{\text{Тех}}) = (1.0, 0.0, 0.0)$. Оскільки KL-дивергенція та χ^2 не визначені при нульових імовірностях, застосовуємо стандартне згладжування (Laplace smoothing) з $\varepsilon = 0.05$:

$$Q' = (0.90, 0.05, 0.05)$$

Емпіричні частоти стратегій Zerg у ZvP з проаналізованих баз даних [4,5] ($n = 200$ матчів):

Таблиця 3. Емпіричні частоти стратегій Zerg у ZvP

Стратегія	O_i (матчів)	$P(i)$ емп.	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
Агресія	148	0.74	180	5.69

Економіка	32	0.16	10	48.40
Технологія	20	0.10	10	10.00

KL-дивергенція вимірює інформаційну відстань між емпіричним розподілом P та теоретичним Q' :

$$\begin{aligned}
 D_{KL}(P \parallel Q') &= \sum_i P(i) \cdot \ln(P(i) / Q'(i)) \\
 &= 0.74 \cdot \ln(0.74/0.90) + 0.16 \cdot \ln(0.16/0.05) + 0.10 \cdot \ln(0.10/0.05) \\
 &= 0.74 \cdot (-0.195) + 0.16 \cdot 1.163 + 0.10 \cdot 0.693 \approx -0.144 + 0.186 + 0.069 \approx 0.11
 \end{aligned}$$

Значення $D_{KL} \approx 0.11$ є відносно малим, що свідчить про близькість реального розподілу до рівноважного. Для порівняння: якби гравці обирали стратегії рівномірно, $D_{KL} \approx 0.59$.

Критерієм χ^2 перевіряємо гіпотезу H_0 : емпіричний розподіл відповідає теоретичному. В результаті отримуємо, що розподіл статистично відрізняється від чистої рівноваги — що є очікуваним результатом: реальні гравці не грають одну стратегію у 100% матчів, але домінування Агресії (74%) якісно підтверджує теоретичний прогноз.

Висновки

У роботі показано, що StarCraft 2 допускає коректну формалізацію як байєсівська гра з неповною інформацією. За допомогою представлення Зелтена задача зводиться до стандартної стратегічної форми, що дозволяє застосовувати алгоритм перебору носіїв для знаходження рівноваги. Аналіз матчів ZvP виявив домінування агресивних стратегій та чисту рівновагу, що узгоджується з реальною практикою гри. Порівняння теоретичних рівноваг з емпіричними за допомогою KL-дивергенції та критерію χ^2 дає кількісну оцінку того, наскільки поведінка гравців відповідає теоретично оптимальній. Запропонований підхід може бути розширений на всі матчі та використаний для аналізу інших стратегічних ігор з неповною інформацією.

Список використаних джерел:

1. Harsanyi J. C. Games with incomplete information played by Bayesian players. Part I. Management Science. 1967. Vol. 14. P. 159–182.
2. Harsanyi J. C. Games with incomplete information played by Bayesian players. Part II. Management Science. 1968. Vol. 14. P. 320–334.
3. Narahari Y. Game Theory. Lecture Notes, Chapter 13: Bayesian Games. Indian Institute of Science, Bangalore. 2012. 12 p.
4. Aligulac — StarCraft 2 statistics database. (Дата звернення: 28.03.2026)
5. Spawning Tool — StarCraft 2 statistics database. (Дата звернення: 29.03.2026)

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ЗРОСТАННЯ ПУХЛИНИ З УРАХУВАННЯМ ХІМІОТЕРАПІЇ ТА ПОБІЧНОГО ЕФЕКТУ НА ІНШИЙ ОРГАН

Тюрдьо І.М.

E-mail: ivanturdio@gmail.com

Науковий керівник: Кізілова Н.М..

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Математичні моделі зростання пухлин є потужним інструментом для кількісного опису динаміки розвитку злоякісних новоутворень. Вони дозволяють досліджувати механізми проліферації клітин, оцінювати ефективність лікування та прогнозувати перебіг хвороби [1]. У літературі описано багато підходів, від простих детермінованих моделей на основі диференціальних рівнянь до складних стохастичних і мультиагентних систем.

У найпростішій математичній моделі пухлини як сукупності одного типу злоякісних клітин $X(t)$ та одного препарату з дозою $c(t)$ вплив хіміотерапії (ХТ) визначається рівнянням:

$$\frac{dX}{dt} = f(x) - g(c, X) \quad (1)$$

де $f(X)$ і $g(c, X)$ описують незбуджене зростання пухлини та вплив хіміотерапії з дозою $c(t)$, відповідно.

Відповідно до різних нелінійних моделей зростання пухлини та наявності ХТ, у рівнянні (1) можемо використати наступні загальноприйняті функції

$$\begin{aligned} f(X) = \{ & 1) rX^m \\ & 2) rX^\alpha (1 - X^\beta)^\gamma \\ & 3) \alpha X^\beta - \gamma X^\delta \\ & 4) \alpha e^{-\beta t} X \} \end{aligned} \quad (2)$$

$$g(c, X) = \{-kX, k_{LK} X_c, k_{NS} cF(X), k_{emax} \frac{cX}{X_0 + X}\}$$

де 1) – степеневе, 2) - узагальнене логістичне, 3) - фон Берталанфі, і 4) - Гомпертца моделі зростання пухлини; k - постійна швидкість руйнування пухлинних клітин клітинами-кілерами та дендритними клітинами, k_{LK} , k_{NS} , k_{emax} - коефіцієнти моделей LK, NS і E-max, відповідно [2,3].

Якщо додати до рівняння (1) з урахуванням (2) рівняння, яке описує вплив хіміотерапії на здоровий орган людини, то отримаємо наступну систему ЗДР:

$$\left\{ \frac{dX}{dt} = f(x) - g(c, X), \right. \quad (3)$$

$$\frac{dW}{dt} = -k_c C\}$$

де k_c - коефіцієнт руйнівного впливу хіміотерапії на здоровий орган.

Логістична модель Ферхюльста стала однією з найпопулярніших у біостатистиці, оскільки дозволяє враховувати обмеження ресурсів та ефекти насичення, які властиві реальним біологічним системам [4]. З часом біологічним клітинам бракує поживних речовин і кисню, наростає гіпоксія та метаболічні обмеження, які уповільнюють зростання тканини.

$$\frac{dV}{dt} = bV \left(1 - \frac{V}{V_{max}}\right) \quad (4)$$

де V_{max} - максимальний можливий розмір (маса) пухлини, b – швидкість зростання.

Використовуючи (4) в системі рівнянь (3), отримаємо:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= bV \left(1 - \frac{V}{V_{max}}\right) - k_1 C \\ \frac{dW}{dt} &= -k_2 C \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де $C(t)=const$ – концентрація хіміотерапії в крові, V, W - об'єми пухлини та умовно здорового органу, V_{max} - максимальний можливий об'єм пухлини, b – швидкість її зростання, k_1, k_2 - коефіцієнти руйнівного впливу хіміотерапії на пухлину і здоровий орган, відповідно.

В роботі досліджена система рівнянь (5), знайдені її стаціонарні точки, визначені типи фазових портретів динамічної системи в залежності від різних наборів значень (k_1, k_2) .

Аналогічно планується виконати аналіз з іншими моделями зростання (2) у правій частині рівняння 1 та перевірити співвідношення отриманих результатів з даними спостережень за зростанням пухлин різних типів з відкритих джерел.

Список використаних джерел:

1. B. Ribba, N.H.G. Holford, P. Magni, et al., A review of mixed-effects models of tumor growth and effects of anticancer drug treatment used in population analysis, CPT: Pharmacometrics & Systems Pharmacology, 3(5), e113, 2014. doi: 10.1038/psp.2014.14
2. Oh Ch., Wilkie K.P. How Mathematical Forms of Chemotherapy and Radiotherapy Bias Model-Optimized Predictions: Implications for Model Selection. ArXive. 2025, eprint2511.15932, <https://arxiv.org/abs/2511.15932>. (Дата звернення: 16.03.2026)

3. Panetta J.C. Mathematical Models of Chemotherapy. PhD Dissertation, Mathematics & Statistics, Old Dominion University, 1995, DOI: 10.25777/5aev-jk74
4. C. Vaghi, A. Rodallec, R. Fanciullino, et al., Population modeling of tumor growth curves and the reduced Gompertz model improve prediction of the age of experimental tumors, PLoS Computational Biology, 16(2), e1007178, 2020. doi: 10.1371/journal.pcbi.1007178

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Калініченко А.С.

E-mail: anatolii.kalinichenko@nure.ua

Науковий керівник: Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Проблема контролю та профілактики пожеж при зберіганні та транспортуванні таких сипучих матеріалів, як вугілля, агропромислові культури, бавовна, торф викликана їх схильністю до загоряння без впливу зовнішнього джерела запалювання. Цей процес називається самозайманням та виникає як наслідок накопичення тепла від екзотермічної реакції окиснення. Його математичне моделювання у скупченні матеріалу, форма якого описується просторовою областю Ω , пов'язане з необхідністю знаходження розв'язку початково-крайової задачі для тривимірного напівлінійного рівняння теплопровідності для функції зміни температури

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A\Delta\theta + Be^{\theta}, x \in \Omega, t \in (0, t_0], \quad (1)$$

$$\theta(x, t) > 0, x \in \Omega, t \in (0, t_0], \quad (2)$$

$$\theta(x, 0) = 0, x \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$\theta(x, t) = 0 \text{ на } \partial\Omega, t \in [0, t_0], \quad (4)$$

де Δ – оператор Лапласа, $A > 0$, $B > 0$ – параметри, що задають фізико-хімічні властивості процесу, $x = (x_1, x_2, x_3)$, Ω – обмежена область з R^3 з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, t_0 – час моделювання.

Останній доданок в правій частині рівняння враховує тепло, що виділяється при хімічній екзотермічній реакції окиснення матеріалу, та

отриманий апроксимацією з закону Арреніуса [2] при припущенні про сталість параметрів A і B .

На часовому відрізку $[0, t_0]$ введемо сітку з кроком τ :

$$t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, m, m\tau = t_0$$

та позначимо $\theta_j = \theta_j(x) = \theta(x, t_j)$. Розв'язок задачі (форм. 1) – (форм. 4), відповідно до методу Рунге, шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$. Для цього на кожній прямій $t = t_j$ апроксимуємо відношенням скінченних різниць диференціальний оператор в лівій частині рівняння (форм. 1), що в сукупності з (форм. 3) та (форм. 4) дозволяє звести знаходження розв'язку початково-крайової задачі (форм. 1) – (форм. 4) до розв'язання послідовності крайових задач:

$$-\Delta\theta_j(x) + \frac{1}{A\tau}\theta_j(x) = F(x, \theta_j(x)), x \in \Omega, \quad (5)$$

$$\theta_j(x) > 0, x \in \Omega, \quad (6)$$

$$\theta_j(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega, j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

де $F(x, \theta_j(x)) = \frac{1}{A\tau}\theta_{j-1} + \frac{B}{A}e^{\theta_j}$, $\theta_0(x) = 0$. До кожної з яких послідовно застосуємо метод двобічних наближень з використанням квазіфункції Гріна-Рвачова [1], що дозволяє побудувати ітераційний процес для більшого класу областей, ніж при використанні функції Гріна.

Нехай $\omega(x)$ – елементарна функція, що описує геометрію області Ω ($\omega(x) > 0$ у Ω , $\omega(x) = 0$ і $|\nabla\omega(x)| \neq 0$ на $\partial\Omega$), побудована методом R -функцій. Тоді квазіфункція Гріна-Рвачова для оператора Гельмгольца $-\Delta + \frac{1}{A\tau}$ з правої частини рівняння (форм. 5) визначатиметься формулою

$$Q(x, s) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)} e^{-\frac{1}{\sqrt{A\tau}}r} - r e^{-\frac{1}{\sqrt{A\tau}}\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}}}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}},$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)$, $s = (s_1, s_2, s_3)$,

$$r = |x - s| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2}.$$

Надалі вважатимемо j фіксованим. Оскільки при знаходженні функції θ_j уже відома функція θ_{j-1} , то крайова задача (форм. 5) – (форм. 7) у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ неперервних у $\bar{\Omega}$ функцій з конусом невід'ємних функцій $K_+ = \{\theta \in C(\bar{\Omega}): \theta(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$ еквівалентна інтегральному рівнянню Урисона $\theta_j(x) = T(\theta_j)(x)$ з ізотонним оператором

$$T(\theta_j)(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)\theta_j(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)\theta_j(s)ds + \int_{\Omega} Q(x, s)F(s, \theta_j(s))ds,$$

де $K^+(x, s) = \{0, K(x, s)\}$, $K^-(x, s) = \{0, -K(x, s)\}$,

$$K(x, s) = \frac{1}{4\pi} \left(-\Delta + \frac{1}{A\tau} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}} e^{-\frac{1}{\sqrt{A\tau}} \sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}}.$$

На j -му часовому шарі інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $< 0, \beta_j >$, де число $\beta_j > 0$ визначається з нерівностей

$$\begin{aligned} -\beta \int_{\Omega} K^-(x, s) ds + \frac{B}{A} \int_{\Omega} Q(x, s) ds &\geq 0 \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}, \\ \beta \int_{\Omega} K^+(x, s) ds + \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} Q(x, s) \Theta_{j-1}(s) ds + \frac{B}{A} e^{\beta} \int_{\Omega} Q(x, s) ds &\leq \beta \text{ для} \\ &\text{всіх } x \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Отже, ітераційний процес методу двобічних наближень матиме вигляд

$$\begin{aligned} v^{(k)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s) v^{(k-1)}(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x, s) w^{(k-1)}(s) ds + \\ &+ \int_{\Omega} Q(x, s) F(s, v^{(k-1)}(s)) ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad v^{(0)}(x) = 0, \\ w^{(k)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s) w^{(k-1)}(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x, s) v^{(k-1)}(s) ds + \\ &+ \int_{\Omega} Q(x, s) F(s, w^{(k-1)}(s)) ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad w^{(0)}(x) = \beta_j. \end{aligned}$$

За наближений розв'язок вихідної задачі (форм. 1) – (форм. 4) на j -му часовому шарі на k -й ітерації з точністю $\varepsilon > 0$ приймаємо функцію

$$\Theta_j^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}$$

при виконанні умови $\max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$.

Застосовуючи до крайових задач (форм. 5) – (форм. 7) на кожному часовому шарі запропонований ітераційний процес методу двобічних наближень, отримаємо набір функцій $\Theta_0(x) = 0, \Theta_1^{(k_1)}(x), \Theta_2^{(k_2)}(x), \dots, \Theta_m^{(k_m)}(x)$.

Обчислювальний експеримент було проведено для півсферичної області $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_3 \geq 0\}$ з радіусом 1, описаної функцією

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{1}{2} (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \wedge_0 x_3 = \\ &= \frac{1}{2} (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + x_3 - \sqrt{\frac{1}{4} (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^2 + x_3^2}, \end{aligned}$$

при значеннях параметрів $A = 1, B = 1,25, t_0 = 1, \tau = \frac{1}{3}$.

Список використаних джерел:

1. Сидоров М. В. Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. № 18. С. 146–161.
2. Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and heat transfer in chemical kinetics. 2nd ed. New York : Plenum, 1969. 574 p.

ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗМІННОГО СТРУМУ

Овчаренко Д.О.

E-mail: Dmytro.Ovcharenko1@kname.edu.ua

Науковий керівник: Горонескуль М.М.

Харківський національний університет міського господарства імені О.М.

Бекетова

Розрахунок електричних кіл змінного струму належить до фундаментальних задач сучасної електротехніки. Синусоїдальні коливання напруги і струму у реальних схемах зазнають фазових зсувів, що ускладнює аналітичні перетворення при використанні класичних тригонометричних методів. Громіздкість відповідних перетворень суттєво ускладнює аналіз навіть найпростіших електричних кіл і підвищує ймовірність обчислювальних помилок. У зв'язку з цим у сучасній науковій літературі широко застосовується символічний метод розрахунку на основі апарату комплексних чисел [1; 3; 4].

Формула Ейлера у вигляді $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$ забезпечує математично обґрунтований перехід від тригонометричного представлення гармонічного коливання до показникової форми комплексного числа. Миттєве значення синусоїдної напруги $u = U_m \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}(\underline{u})$, що є уявною частиною комплексної функції часу $\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$. Таким чином, $u = \text{Im}(U_m e^{j(\omega t + \varphi)}) = \text{Im}(U_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}(\underline{U}_m e^{j\omega t})$, де $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$ – комплексна амплітуда, а $\underline{U} = U e^{j\varphi}$ – комплексне діюче значення та $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. Аналогічно визначається комплексна амплітуда струму. Оскільки усі струми і напруги в рівняннях Кірхгофа містять множник $e^{j\omega t}$, то його можна виключити із зображень похідної та інтегралу функції часу, тобто якщо $u = \underline{U}$, то $\frac{du}{dt} = j\omega \underline{U}$ та $\int u dt = \frac{1}{j\omega} \underline{U}$. Завдяки такому підходу розв'язання диференціальних рівнянь перетворюється на систему алгебраїчних рівнянь [2].

Поняття комплексного опору, або імпедансу, узагальнює закон Ома для кіл змінного струму. Активний опір R резистивного елемента формує дійсну частину імпедансу. Реактивний опір котушки індуктивності $X_L = \omega L$ становить додатну уявну частину, тоді як реактивний опір конденсатора $X_C = \frac{1}{\omega C}$ визначає від'ємну уявну складову. Повний комплексний опір послідовного R-L-C кола набуває форми $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi}$, а закон Ома у комплексній формі набуває вигляду $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$ [2]. Перший та другий закони Кірхгофа зберігають свою структуру відносно комплексних амплітуд, що дає змогу застосовувати до аналізу розгалужених мереж змінного струму всі класичні методи розрахунку кіл постійного струму, зокрема метод контурних струмів та метод вузлових потенціалів [1; 2].

Аргумент комплексного числа Z відображає кут зсуву фаз φ між напругою та струмом у досліджуваному колі. При $X_L > X_C$ кут φ є додатним, що відповідає індуктивному характеру навантаження і запізненню струму відносно напруги. При $X_C > X_L$ кут φ є від'ємним, що відповідає ємнісному навантаженню і випередженню струму. Значення $\cos(\varphi)$ є коефіцієнтом потужності і безпосередньо визначає частку активної потужності у повній.

Активна $P = UI \cos(\varphi)$ та реактивна $Q = UI \sin(\varphi)$ потужності відповідно зручно виражаються через дійсну та уявну частини повної комплексної потужності $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$, де $\underline{I}^*$ позначає спряжений комплекс струму [3].

Застосування апарату комплексних чисел принципово спрощує математичний інструментарій аналізу кіл змінного струму. Заміна тригонометричних операцій алгебраїчними діями над комплексними числами мінімізує ймовірність обчислювальних помилок і надає розрахункам прозорості фізичної інтерпретації. Фазові зсуви між струмом і напругою, реактивні складові потужності та частотні характеристики кіл природно описуються через геометрію комплексної площини. Зазначений підхід є математичною основою сучасних методів аналізу енергетичних систем і проектування електронних пристроїв та залишається незамінним інструментом у підготовці майбутніх інженерів-електротехніків.

Список використаних джерел:

1. Горєв В.М. Теорія електричних кіл та сигналів. Навч. посіб. НТУ «Дніпровська політехніка». Дніпро. 2021. 104 с.
2. Косенков В.Д., Горошко А.В., Каштал'ян А.С., Бідюк В.Д. Теорія електричних кіл. Навч. посіб. ХНУ. Хмельницький. 2024. 346 с. URL: https://kfe.khmnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/69/2024/11/tek_final.pdf (дата звернення: 19.04.2026).

3. Kirkham H. 75 years of drift: the changing meaning of phasor. IEEE Power & Energy Magazine. 2020. Vol. 18, no. 1. P. 76–88. DOI: <https://doi.org/10.1109/MPE.2019.2945102> (дата звернення: 19.04.2026).
4. Yu, W. Phasor Toolbox for AC Circuit Analysis Using MATLAB. ASEE Annual Conference & Exposition Proceedings. 2018. DOI: <https://doi.org/10.18260/1-2--29643> (дата звернення: 19.04.2026).

ЗАСТОСУВАННЯ ПАНЕЛЬНОГО МЕТОДУ В АЕРОДИНАМІЦІ

Малютін Н.Д.

E-mail: nikita.maliutin06@gmail.com

Науковий керівник: Бебія М.О.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Використання повних моделей Нав'є-Стокса в обчислювальній гідродинаміці (CFD) часто обмежене високими вимогами до машинного часу. Як ефективна альтернатива для швидких інженерних розрахунків розглядається панельний метод [3]. Метою роботи є створення та опис власної програмної реалізації даного алгоритму з повним циклом обробки даних. Оскільки модель використовує припущення про нев'язке та нестисливе середовище, її застосування обмежується докритичними кутами атаки та швидкостями до 0,3 Маха.

Описані вище умови дозволяють вважати рідину потенціальною $\underline{V} = \nabla \Phi$ і нестисловою $\nabla \cdot \underline{V} = 0$ — таким чином отримуємо рівняння Лапласа $\nabla^2 \Phi = 0$

Три умови, яким повинна задовольняти функція Φ [4]

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на поверхні}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\nabla \Phi - v) = 0, \text{ де } v \text{ — відносна швидкість тіла в рідині}$$

У загальному випадку знайти Φ неможливо, тому, користуючись лінійністю рівняння Лапласа, можемо представити поверхню тіла чотирикутниками і знаходити рішення окремо для кожної комірки. Використовуючи теореми Гріна, можна знайти елементарні розв'язки [2].

Точкове джерело (Source), Точковий стік (Sink): $\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi r}$

Якщо $\sigma > 0$, ми отримуємо джерело, у випадку $\sigma < 0$ маємо стік.

Точковий диполь (Doublet)

$$\Phi = \frac{\mu}{4\pi} \underline{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad \Phi_{doublet} = -\frac{\partial}{\partial n} \Phi_{source}$$

Практична реалізація

Програма написана в середовищі MATLAB, для створення моделі та побудови структурованої сітки використовується OpenVSP — ПЗ від NASA з відкритим програмним забезпеченням. Проблема полягає в тому, що кожна частина тіла літака описується незалежно одна від одної і існують ситуації, коли елементи покриття (панелі) однієї частини літака опиняються всередині іншої частини. Тому для коректного опису поверхні був створений власний алгоритм видалення зайвих панелей. Очищення внутрішніх елементів базується на логічному об'єднанні алгоритму Меллера-Трумбора та аналізу перерізів тіла, після чого виконується орієнтація панелей і визначення задньої кромки. Після дискретизації геометрії маємо систему [1]:

$$\sum_{k=1}^N C_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l \mu_l + \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k = 0$$

Завдяки введенню умови Кутти зводимо кількість невідомих до N і розв'язуємо відносно μ , вважаючи, що $\sigma_k = V_{inf} \cdot \underline{n}_k$. Після чого знаходимо індуковану швидкість, коефіцієнт тиску, підймальну силу і коефіцієнт підймальної сили:

$C_l = \frac{L}{2\rho V_{inf}^2 S_{ref}}$, де S_{ref} — половина площі крил і горизонтального стабілізатора.

Результати

Літак складається з 15172 панелей, після видалення залишилось 14167.

1. Максимальне відносне відхилення за модулем для фіксованого сліду становить 0.03595
2. Максимальне відносне відхилення за модулем для динамічного сліду становить 0.02809
3. Середня відносна похибка для фіксованого сліду 0.64%
4. Середня відносна похибка для динамічного сліду 0.59%

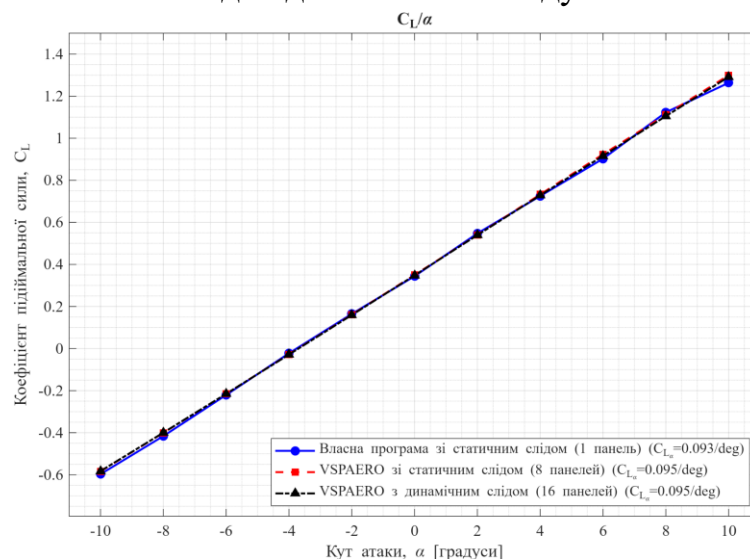


Рис. 1 : Зміна коефіцієнту підймальної сили при різних кутах атаки

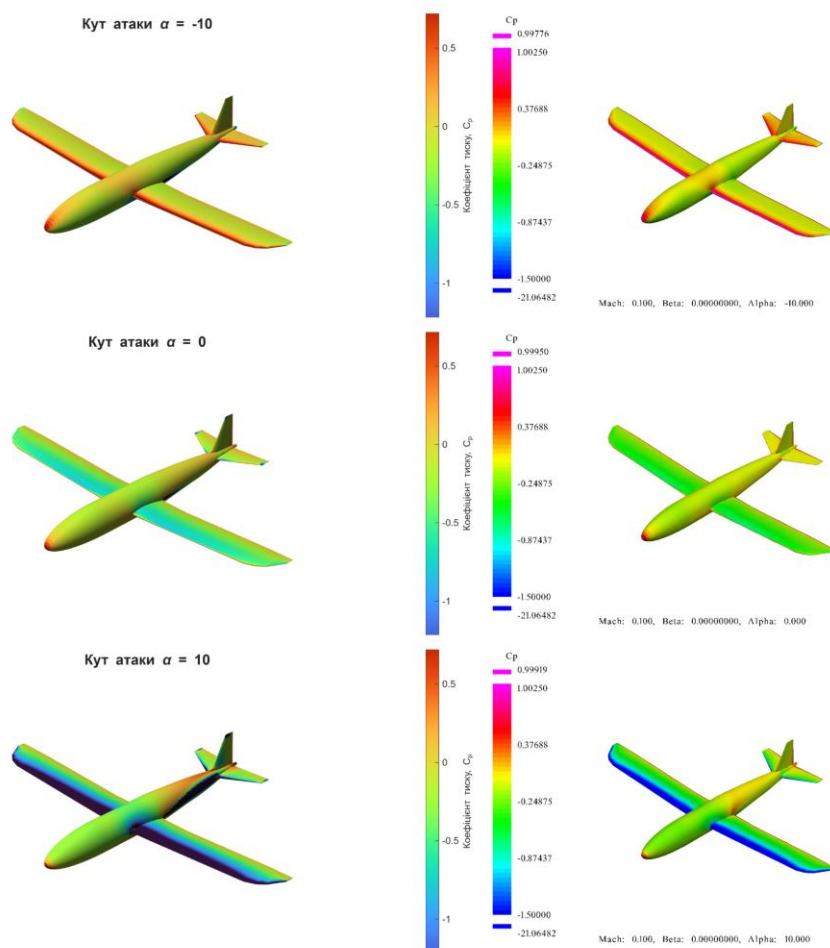


Рис. 2 : Візуалізація коефіцієнту тиску на поверхні тіла. Ліворуч — результати роботи написаної програми, праворуч — результати VSPAERO

Для порівняння були взяті результати VSPAERO, доступного в OpenVSP. Механізм роботи згаданого ПЗ аналогічний описаному в цій статті. Результати порівняння, зображені на рисунку 2, підтверджують, що зміна коефіцієнта тиску на поверхні літального апарата повністю відповідає фізиці процесу.

Візуальні артефакти пояснюються недосконалістю алгоритму очищення геометрії моделі, що може призводити до помилкового видалення панелей і неправильного вибору сусідніх комірок. Це найчастіше трапляється в місцях перетину різних частин літака.

Метою статті було ознайомити читача з базовим методом обчислювальної аеродинаміки, розробити власну програму та пояснити основні етапи та складнощі, які виникають під час її розробки.

Перевагою розробленої в роботі програми є стійкість: VSPAERO чутливий до геометрії, через що для значної кількості загальнодоступних моделей застосувати його неможливо. Натомість код у цій статті [5] має набагато ширше застосування і дозволяє отримати результати для більшості літальних апаратів.

Список використаних джерел:

1. Anderson J. Fundamentals of Aerodynamics. McGraw Hill Education. 2017. 1154 с.
2. Birk L. A comprehensive and practical guide to the Hess and Smith constant source and dipole panel. Ship Technology Research 2021. С. 1-13
3. Erickson L. Panel methods: An introduction. 1991. 68 с.
4. Katz J., Plotkin A. Low-speed aerodynamics. Cambridge university press, 2001. 629 с.
5. Maliutin N. Applying panel method using Matlab and OpenVSP [Електронний ресурс]. URL: <https://github.com/nikitamaliutin06/panelmethod> (дата звернення: 08.04.2026).
6. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. Parabolic Press, 1982. 177 с.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ РОСТУ ПУХЛИНИ ДЛЯ ВИБОРУ ПЕРСОНАЛІЗОВАНОЇ ХІМІОТЕРАПІЇ

Седюк А.Д.

E-mail: seduknasta7@gmail.com

Науковий керівник: Кізілова Н.М.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Класичні описові моделі (логістична, закон Гомпертца) з високою точністю апроксимують криву зростання загального об'єму пухлини на перших стадіях [2]. Проте вони розглядають неоплазію як гомогенну масу та ігнорують клітинну гетерогенність. Цей недолік обмежує їхню прогностичну цінність: хіміотерапевтичні препарати діють вибірково, знищуючи переважно клітини, що активно діляться, тоді як клітини у стані гіпоксії залишаються резистентними.

Для адекватного прогнозування динаміки необхідний перехід до механістичних моделей на базі систем диференціальних рівнянь, що описують взаємодію проліферуючих клітин (P) та клітин у стані спокою (Q) [1]. Метою дослідження є побудова, якісний аналіз та статистичне калібрування такої моделі для персоналізованого прогнозування розвитку гліобластоми.

Побудова механістичної $P - Q$ моделі

Пухлинна тканина розглядається як система функціонально різних компартментів [1, 2]. На ранніх стадіях розвитку, до формування масивного некротичного ядра, загальний об'єм апроксимується як $V(t) = P(t) + Q(t)$. Взаємозв'язки між групами клітин (рис. 1), описуються системою звичайних диференціальних рівнянь (1) система диференціальних рівнянь механістичної $P - Q$ моделі.

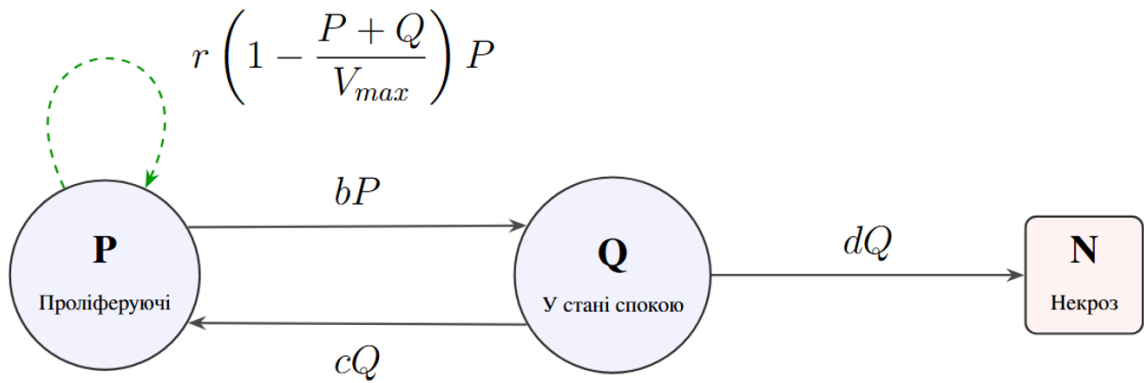


Рис. 1 : Схема взаємодії клітинних популяцій

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= r \left(1 - \frac{P+Q}{V_{max}} \right) P - bP + cQ \\ \frac{dQ}{dt} &= bP - (c+d)Q\end{aligned}\tag{1}$$

Параметри моделі відображають ключові біологічні процеси: r – питома швидкість зростання проліферуючих клітин; V_{max} – максимальний об'єм пухлини; b та c — інтенсивність переходів між станами поділу та спокою; d – швидкість загибелі клітин. Логістичний множник аналітично відображає контактне гальмування: зменшення швидкості поділу пропорційно до дефіциту вільного простору. Фазовий простір системи є додатно інваріантним, що гарантує біологічну реалістичність розв'язків.

Біфуркаційний аналіз та критерій агресивності R_0

Аналіз матриці Якобі системи (форм. 1) дозволив визначити стаціонарні точки: тривіальну $E_0(0,0)$ (відсутність пухлини) та нетривіальну $E_1(P^*, Q^*)$. Еволюцію системи визначає базовий показник розмноження пухлини (2) розрахунок показника агресивності пухлини.

$$R_0 = \frac{r(c+d)}{bd}\tag{2}$$

Керуючий параметр R_0 відображає очікувану кількість нових проліферуючих клітин, яку здатна утворити одна активна клітина за весь час існування у вільному середовищі. При $R_0 < 1$ система прямує до тривіальної точки E_0 (режим регресії). При переході через критичне значення $R_0 = 1$ відбувається транскритична біфуркація, тобто точка E_0 втрачає стійкість, стаючи сідлом, а фазові траєкторії прямують до асимптотично стійкого стану E_1 (режим прогресування) (рис. 2).

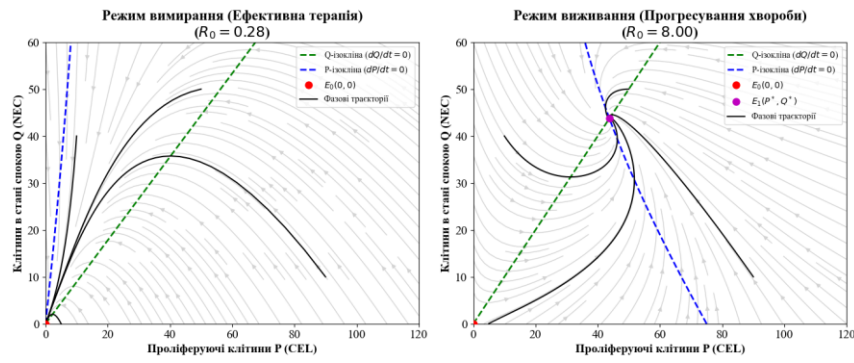


Рис. 2 : Фазові портрети системи (регресія та прогресування)

Аналіз чутливості границі $r(d) = \frac{bd}{c+d}$ демонструє, що якщо швидкість проліферації r перевищує швидкість переходу в стан спокою b , цільова терапія виключно на Q -клітини є неефективною.

Калібрування на клінічних даних

Апробацію моделі проведено на даних пацієнта Patient-025 з датасету LUMIERE [3]. Ідентифікацію параметрів виконано методом L-BFGS-B на етапі рецидиву. Розрахований критерій $R_0 \approx 2.3$ підтверджує прогресування (рис. 3).

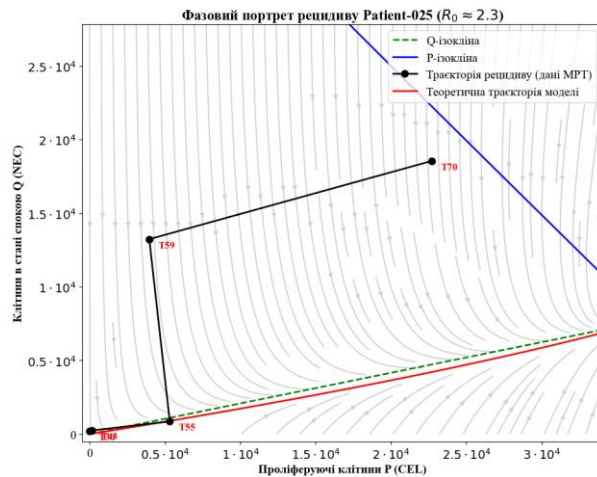


Рис. 3 : Фазовий портрет рецидиву пацієнта Patient-025

Для визначення оптимального закону гальмування проведено порівняння логістичної та гомпертцівської структур моделі (табл. 1).

Таблиця 1 : Порівняння точності апроксимації структур моделі

Математична структура	Значення похибки(RMSE)	Коефіцієнт детермінації (R^2)
Логістична модель	660	0.94
Гомпертцівська модель	1535	0.81

Оцінка якості апроксимації (рис. 4) доводить, що лінійне (логістичне) гальмування проліферації забезпечує значно вищу точність наближення до фактичних об'ємів порівняно з гомпертцівським законом.

Водночас аналіз фазових траєкторій, побудованих за емпіричними даними інтенсивного лікування, виявляє багаторазові самоперетини. В автономних двовимірних системах без граничних циклів це неможливо. Даний факт є строгим математичним доказом неавтономності реального процесу.

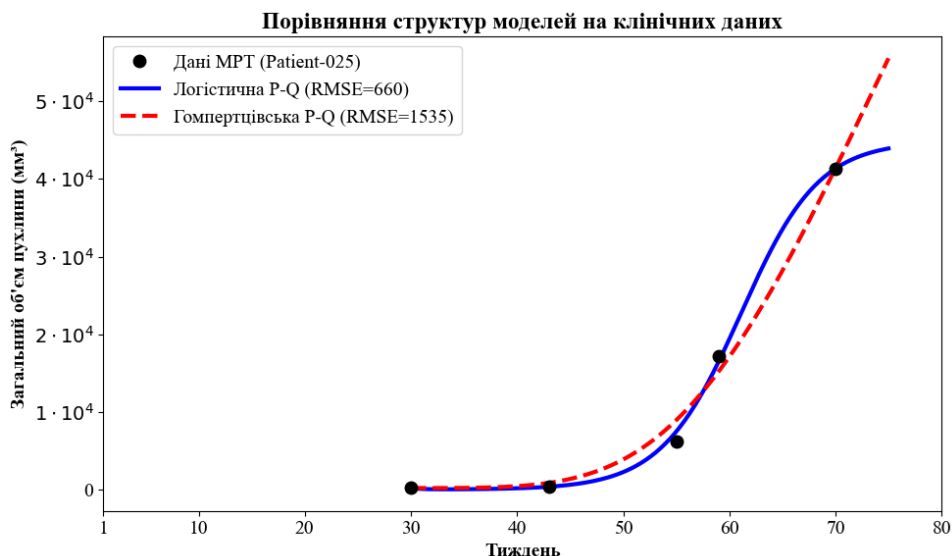


Рис. 4 : Порівняння логістичної та гомпертцівської моделей на клінічних даних

Висновки

Побудовано компартментальну математичну модель динаміки гліобластоми, що враховує взаємодію проліферуючих клітин та клітин у стані гіпоксії. Виведено аналітичний критерій агресивності R_0 . Встановлено, що транскритична біфуркація при $R_0 = 1$ є індикатором переходу від ефективної терапії до рецидиву. Обернена задача на МРТ-даних підтвердила здатність логістичної $P - Q$ моделі з високою точністю описувати динаміку рецидиву ($RMSE = 660$). Зафіксовані фазові самоперетини у клінічних даних обґрунтовують необхідність переходу до моделей оптимального керування із введенням функції зовнішнього медикаментозного впливу.

Список використаних джерел:

1. Gyllenberg M., Webb G. F. Quiescence as an explanation of Gompertzian tumor growth. *Growth, Development, and Aging*. 1989. Vol. 53, No. 1-2. P. 25–33.
2. Jarrett A. M., Lima E. A., Saut O. та ін. Mathematical models of tumor cell proliferation: a review of the literature. *Expert Review of Anticancer Therapy*. 2018. Vol. 18, No. 12. P. 1271–1286.
3. Suter Y., Lê M., Glauser G. та ін. The LUMIERE dataset: Longitudinal Glioblastoma MRI with expert RANO evaluation. *Scientific Data*. 2022. Vol. 9, No. 1. Article 729.

**МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ЗНАХОДЖЕННЯ
ДОДАТНОГО АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ
ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ
З ГЕТЕРОТОННОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ**

Пархоменко В.Г.

E-mail: vladyslav.parkhomenko1@nure.ua

Харківський національний університет радіоелектроніки

Математичне моделювання процесів, що протікають в нелінійних середовищах, приводить до необхідності чисельного аналізу першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \text{ у } \Omega, \\ u &> 0 \text{ у } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де Δ – оператор Лапласа, Ω – область в $R^2_{(x_1, x_2)}$ з кусково-гладкою межею, функція $f(u)$ неперервна та додатна при $u > 0$.

Якщо область Ω є кругом радіуса R , то можна поставити задачу знаходження розв'язку крайової задачі (форм. 1), що має аксіальну симетрію, тобто залежить лише від $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Тоді шляхом переходу до полярних координат крайова задача (форм. 1) для диференціального рівняння у частинних похідних зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння відносно функції $u = u(\rho)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) &= f(u), \quad 0 < \rho < R, \\ u(\rho) &> 0, \quad 0 < \rho < R, \\ |u(0)| &< +\infty, \quad u(R) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Умова обмеженості $|u(0)| < +\infty$ в постановці задачі (форм. 2) виникає через те, що полюс $\rho = 0$ полярної системи координат є особливою точкою отриманого звичайного диференціального рівняння.

За допомогою методу функцій Гріна задача (форм. 2) зводиться до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна

$$u(\rho) = \int_0^R K(\rho, s) f(u(s)) ds, \tag{3}$$

де $K(\rho, s) = \begin{cases} s \ln \ln \frac{R}{s} & 0 \leq \rho \leq s, \\ s \ln \ln \frac{R}{\rho} & s < \rho \leq R. \end{cases}$

Пов'яжемо з рівнянням (форм. 3) наступний нелінійний інтегральний оператор:

$$T(u)(\rho) = \int_0^R K(\rho, s)f(u(s))ds. \quad (4)$$

Рівняння (форм. 3) розглядатимемо як нелінійне операторне рівняння в банаховому просторі $C[0, R]$, який напівопорядковано конусом K_+ невід'ємних на $[0, R]$ неперервних функцій [1]. За узагальнений розв'язок крайової задачі (форм. 2) приймемо неперервний на $[0, R]$ і додатний на $(0, R)$ розв'язок рівняння (форм. 3). Дослідимо властивості оператора T (форм. 4).

Нехай функція $f(u)$ допускає діагональне подання $f(u) = \hat{f}(u, u)$, причому невід'ємна функція $\hat{f}(v, w)$ неперервна за сукупністю змінних v, w , монотонно зростає за v і монотонно спадає за w . Тоді оператор T є гетеротонним, тобто $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, де супутній оператор $\hat{T}(v, w)$ є ізотонним за v та антитонним за w .

Оператор $T(u)$ є додатним, тобто з $u \in K_+$ випливає, що $T(u) \in K_+$.

Нехай $u_0(\rho) = \int_0^R K(\rho, s)ds = \frac{1}{2}(R^2 - \rho^2)$. Тоді оператор $T(u)$ є u_0 -додатним, тобто для будь-якого ненульового $u \in K_+$ існують такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \leq T(u) \leq \beta u_0$.

Нехай $\hat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(v, w)$ для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$. Тоді оператор $T(u)$ є псевдоувігнутим і навіть u_0 -псевдоувігнутим, тобто для будь-яких $v, w \in K_+$ і $\tau \in (0, 1)$ існує $\eta = \eta(v, w, \tau)$, $\eta > 0$, для якого справджується нерівність $\hat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{f}(v, w)$, $\hat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \neq \tau \hat{f}(v, w)$.

Оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Припустимо, що гетеротонний оператор T має сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$. Кінці відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ визначаються умовами $\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0$, $\hat{T}(v_0, w_0) \leq w_0$ і можуть бути знайдені, зокрема, у вигляді $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$.

Взявши v_0 і w_0 за початкові наближення, побудуємо наступний ітераційний процес:

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= \int_0^R K(\rho, s)\hat{f}(w^{(k)}, v^{(k)})ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ w^{(k+1)} &= \int_0^R K(\rho, s)\hat{f}(v^{(k)}, w^{(k)})ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ v^{(0)}(\rho) &= v_0(\rho), \quad w^{(0)}(\rho) = w_0(\rho), \end{aligned} \quad (5)$$

де послідовність $\{v^{(n)}\}$ не спадає за конусом K_+ , а послідовність $\{w^{(n)}\}$ не зростає за конусом K_+ . Оскільки конус K_+ є нормальним, а оператор T має перелічені вище властивості, то побудовані ітераційні послідовності (форм. 5) збігаються у нормі простору $C[0, R]$ до єдиного додатного аксіально-симетричного розв'язку u^* крайової задачі (форм. 2) і має місце ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

За наближений розв'язок крайової задачі (форм. 2) на n -й ітерації обираємо функцію $u^{(n)}(\rho) = \frac{1}{2}(v^{(n)}(\rho) + w^{(n)}(\rho))$. При цьому апостеріона похибка наближення оцінюється нерівністю $\|u^{(n)} - u^*\|_{C[0,R]} \leq \frac{1}{2} \max(w^{(n)}(\rho) - v^{(n)}(\rho))$. Ітераційний процес продовжується до тих пір, поки оцінка похибки не задовольняє заданій точності.

Список використаних джерел:

1. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ КОЛОРИЗАЦІЇ МОНОХРОМНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ГЛИБИННОГО НАВЧАННЯ ТА НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Дроняк В. С.

E-mail: droniak.v22@365.dnu.edu.ua

Науковий керівник: Гук Н.А.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Збереження історичної та культурної спадщини є одним з важливих завдань сучасного цифрового суспільства. Величезний масив візуальної інформації минулого століття зберігається у вигляді монохромних чорно-білих фотографій. З розвитком методів штучного інтелекту та комп'ютерного зору з'явилася можливість автоматизувати процес колоризації таких зображень. Використання згорткових нейронних мереж CNN дозволяє побудувати математичні моделі, здатні аналізувати семантичний вміст зображення та прогнозувати правдоподібні кольори для об'єктів.

Метою дослідження є розроблення програмного забезпечення для автоматизованої колоризації монохромних зображень за допомогою методів глибинного навчання та використання згорткових нейронних мереж.

Задача колоризації розглядається як пошук функції відображення F , що перетворює одноканальне зображення інтенсивності L у багатоканальне кольорове зображення. В якості колірної моделі використано простір CIE Lab, де канал L , який відповідає за яскравість, є попередньо заданим, а хроматичні складові a та b підлягають процесу відновлення.

Математично задачу сформульовано в такий спосіб:

$$F: L \in R^{H*W*1} \rightarrow (a, b) \in R^{H*W*2},$$

де H, W – просторові розміри зображення.

Мережа навчається через мінімізацію середньоквадратичної помилки MSE між прогнозованими пікселями $\hat{Y}$ та еталонними пікселями Y :

$$L_{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^W ||Y_{i,j} - \hat{Y}_{i,j}||^2.$$

Для розв'язання задачі відновлення кольору застосовано глибоку згорткову нейронну мережу CNN, побудовану за принципом автоенкодера. Складові енкодер відповідає за послідовність згорткових шарів, які зменшують просторову розмірність зображення, але збільшують глибину ознак. Це дозволяє виділити семантичний зміст об'єкту, наприклад, розпізнати, що даний об'єкт є травою або небом. Після цього Skip Connections передають низькорівневі просторові дані безпосередньо до декодера, функцією якого є запобігання втраті чіткості контурів. Декодер відповідає за послідовність шарів, що відновлюють початкову просторову розмірність, та генерує колірні канали a, b на основі отриманих ознак.

Базовим будівельним блоком мережі є операція згортки, яка математично описується в такий спосіб:

$$y_{i,j} = \sum_m \sum_n w_{m,n} * x_{i+m,j+n} + b,$$

де x – вхідна карта ознак, w – ядро згортки, b – зсув.

Для врахування нелінійності, необхідної для апроксимації складних функціональних залежностей, після кожного шару згортки застосовується функція активації

$$f(x) = (0, x).$$

Навчання моделі здійснюється методом зворотного поширення помилки. Для оновлення ваг використовується ітераційний алгоритм оптимізації, який

адаптує швидкість навчання для кожного параметра індивідуально, при цьому використовуються оцінки першого та другого моментів градієнтів.

Для підвищення інваріантності моделі, тобто уникнення ситуації, коли мережа просто запам'ятовує тренувальні приклади, використовується метод аугментації даних. Обсяг навчальної вибірки штучно збільшується через застосування афінних перетворень до вихідних зображень, зокрема, повороту, віддзеркалення, масштабування, що дозволяє навчити модель унікальним ознакам зображень.

Експериментальна перевірка підтвердила працездатність запропонованого підходу. Використання побудованої архітектури дозволило змодельовати передачу просторових ознак, забезпечити високу деталізацію та правильну ідентифікацію семантичних об'єктів на зображеннях, до яких застосовувалася колоризація.

Список використаних джерел:

1. CIE Color Space. International Commission on Illumination. URL: <https://cie.co.at/>
2. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning MIT Press, 2016. 800 p.
3. Szeliski R. Computer Vision: Algorithms and Applications. 2nd ed. Springer, 2022. 955 p.
4. Zhang R., Isola P., Efros A. A. Colorful Image Colorization. European Conference on Computer Vision (ECCV). Springer, Cham, 2016. P. 649–666. DOI: 10.1007/978-3-319-46487-9_40.

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФЕКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Степаненко О.О.

E-mail: ostepanenko.inbox@gmail.com

Науковий керівник: Смороцова Т.І.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Для аналізу захворюваності на кір, розглянемо модель SIR зі сталою чисельністю населення (1).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (1)$$

За наявними даними [6] оптимізуємо параметри моделі β (коефіцієнт захворюваності) та γ (коефіцієнт одужання) так, щоб з високою точністю передбачити кількість випадків захворювання $I(t)$ в майбутньому, маючи

інформацію за минуле. А саме, будемо мінімізувати суму квадратів відхилень $\sum_i \left(I(t_i) - I_{pred}(t_i) \right)^2$, де t_i – точки заміру (певні роки), $I(t)$ – фактична кількість випадків кору, $I_{pred}(t)$ – прогноз моделі, що знаходиться за допомогою чисельного інтегрування.

Для того, щоб проілюструвати, як працює модель SIR, розглянемо країну, населення якої за останні 50 років змінилося незначним чином – Японію. Зафіксуємо чисельність населення 110 мільйонів осіб і будемо підбирати початкові параметри таким чином, щоб наблизити функцію $I(t)$. Фіксуємо один параметр $\beta = 9.1 \cdot 10^{-9}$, шукаємо значення γ так, щоб мінімізувати суму квадратів похибок. Початкове значення $\gamma = 1.1$.

Варто зазначити, що вибір початкових параметрів є надзвичайно важливим, і процес знаходження оптимальних параметрів є дуже чутливим до вибору початкових наближень. Оскільки стан без захворювань є глобальною асимптотично стійкою точкою спокою [2], то при незначних відхиленнях початкових параметрів функція $I(t)$ або стрімко прямувала до нуля, або демонструвала нереалістичне експоненційне зростання. Тому перед запуском алгоритму мінімізації проводився ручний підбір початкових значень параметрів з метою базової апроксимації емпіричної кривої.

На рис. 1. показано, як модель наближує кількість інфікованих для значення оптимізованого параметра $\gamma = 1.060$. Бачимо, що наявні два окремих піка, які модель не може охопити через свою просту структуру, хоча вона гарно описує решту випадків. Базове репродуктивне число $R_0 = S_0 \frac{\beta}{\gamma}$ приблизно дорівнює 0.944. Оскільки воно менше за 1, то епідемія дійсно йде на спад.

Другий пік пов'язаний з відносно невеликою кількістю вакцинованих новонароджених дітей [5]. Тому для удосконалення моделі пропонується розбити кожну з комірок S , I , R на дві – вакцинованих та невакцинованих. Крім того, будемо враховувати, як з часом змінюється процентна частка невакцинованих.

Отже, можна зробити висновок про те, що модель SIR має потенціал, але для її ефективного використання для прогнозування, вона має бути удосконалена шляхом відокремлення невакцинованих осіб від вакцинованих та врахування кількості вакцинованих новонароджених в залежності від часу.

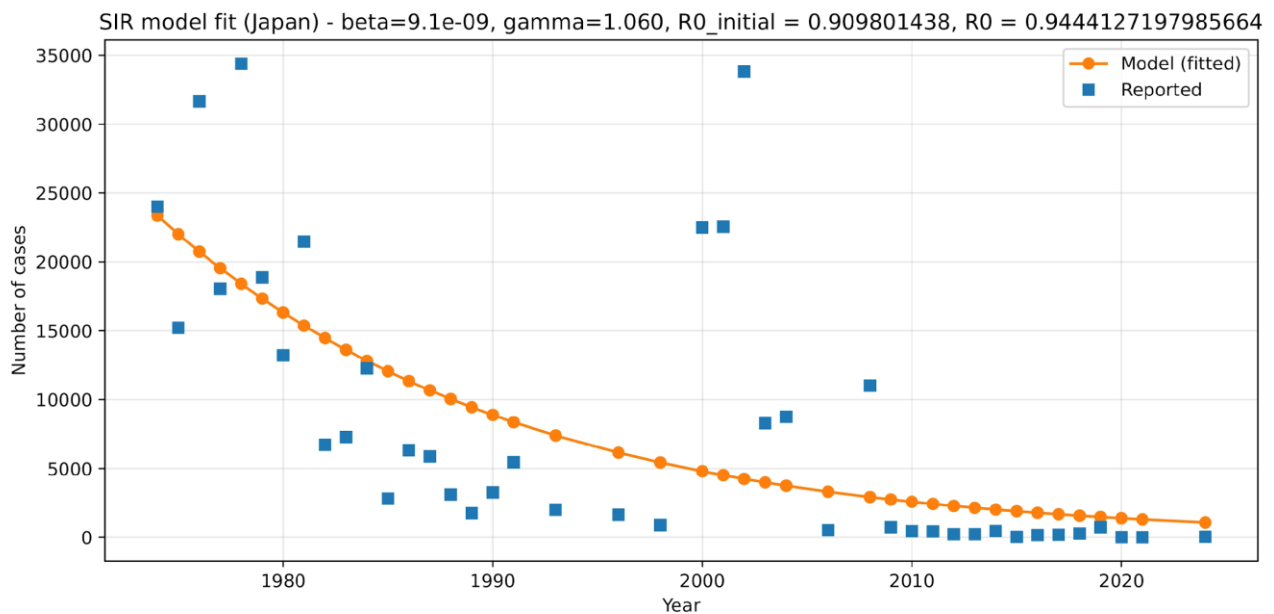


Рис. 1. Оптимізовані параметри у випадку Японії.

Список використаних джерел:

1. Arsal S. R., Aldila D., Handari B. D. Short review of mathematical model of measles. AIP Conf. Proc., вип. 2264, 2020, с. 020003.
2. Li M. Y. An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases. Springer, 2018, 156 с.
3. Ren J., Wang H. Mathematical Methods in Data Science. Elsevier, 2023, 258 с.
4. Stepanenko O. SIR-measles-Japan. URL: <https://github.com/OleksiiStepanenko-main/SIR-measles-Japan> (дата звернення: 28.03.2026)
5. Takahashi Y., Ohkusa Y., Kim J.-Y. The economic disease burden of measles in Japan and a benefit cost analysis of vaccination, a retrospective study. BMC Health Services Research, вип. 11, 2011, с. 254. URL: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC3217873/> (дата звернення: 25.03.2026).
6. World Health Organization. Measles - number of reported cases. 2024. URL: <https://www.who.int/data/gho/data/indicators/indicator-details/GHO/measles—number-of-reported-cases> (дата звернення: 24.03.2026).

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ОСЦИЛЬОВАНИХ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Іванов В.В.

E-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua

Науковий керівник: Нечуйвітер О.П.

При математичному моделюванні сучасних процесів виникає потреба у швидкому та точному наближенні інтегралів від багатовимірних функцій. Одним із підходів до зменшення обчислювальних витрат при забезпеченні необхідної точності є використання розріджених сіток [1]. Застосування розріджених сіток ґрунтується на комбінації одновимірних квадратур різної точності. Використання такого способу дозволяє значно скоротити кількість вузлів у багатовимірній області без істотного зниження точності наближення інтегралу. Розріджені сітки особливо ефективні при обчисленні інтегралів високої розмірності.

До наближеного обчислення інтегралів від функцій декількох змінних можуть бути використані економні схеми інтерполяції, які розглядаються в [2-5]. Такі схеми дозволяють побудувати ефективні кубатурні формули з меншою кількістю значень функції в точках.

В даній доповіді пропонується кубатурна формула для наближеного обчислення потрійних інтегралів від осцильованих експоненціальних функцій, яка в своїй побудові використовує тривимірні економні схеми інтерполяції. Наведена оцінка похибки наближення.

Розглянемо $H^{3,1}(M, \underline{M}, \tilde{M})$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0,1]^3$ і таких, що

$$\begin{aligned} |g^{(1,0,0)}(x, y, z)| &\leq M_g, |g^{(0,1,0)}(x, y, z)| \leq M_g, |g^{(0,0,1)}(x, y, z)| \leq M_g, \\ |g^{(1,1,0)}(x, y, z)| &\leq \underline{M}_g, |g^{(1,0,1)}(x, y, z)| \leq \underline{M}_g, |g^{(0,1,1)}(x, y, z)| \leq \underline{M}_g, \\ |g^{(1,1,1)}(x, y, z)| &\leq \tilde{M}_g. \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned} X_k &= [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], Z_s = [z_{s-1/2}, z_{s+1/2}], \\ \tilde{X}_{\tilde{k}} &= [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}], \tilde{Z}_{\tilde{s}} = [\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2}, \tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}], \\ \underline{X}_{\underline{k}} &= [\underline{x}_{\underline{k}-1/2}, \underline{x}_{\underline{k}+1/2}], \underline{Y}_{\underline{j}} = [\underline{y}_{\underline{j}-1/2}, \underline{y}_{\underline{j}+1/2}], \underline{Z}_{\underline{s}} = [\underline{z}_{\underline{s}-1/2}, \underline{z}_{\underline{s}+1/2}], \end{aligned}$$

$$h_{1k}^0(x) = \{1, x \in X_k, 0, x \notin X_k, h_{2j}^0(y) = \{1, y \in Y_j, 0, y \notin Y_j, h_{3s}^0(z) = \{1, z \in Z_s, 0, z \notin Z_s,$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) = \{1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) = \{1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) = \{1, z \in \tilde{Z}_{\tilde{s}}, 0, z \notin \tilde{Z}_{\tilde{s}},$$

$$\underline{h}_{lk}^0(x) = \{l, x \in \underline{X}_k, 0, x \notin \underline{X}_k, \underline{h}_{2j}^0(y) = \{l, y \in \underline{Y}_j, 0, y \notin \underline{Y}_j, \underline{h}_{3z}^0(z) = \{l, z \in \underline{Z}_s, 0, z \notin \underline{Z}_s,$$

$$\begin{aligned} x_k &= k\Delta - \frac{\Delta}{2}, y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2}, \Delta = \frac{l}{l}, k, j, s = \underline{l}, l, \\ \tilde{x}_{\tilde{k}} &= \tilde{k}\Delta_l - \frac{\Delta_l}{2}, \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_l - \frac{\Delta_l}{2}, \tilde{z}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\Delta_l - \frac{\Delta_l}{2}, \Delta_l = \frac{l}{l^{3/2}}, \tilde{k}, \tilde{j}, \tilde{s} = \underline{l}, l^{3/2}, \\ \underline{x}_{\underline{k}} &= \underline{k}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2}, \underline{y}_{\underline{j}} = \underline{j}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2}, \underline{z}_{\underline{s}} = \underline{s}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2}, \Delta_2 = \frac{l}{l^3}, \underline{k}, \underline{j}, \underline{s} = \underline{l}, l^3. \end{aligned}$$

Розглянемо оператори

$$\begin{aligned} J_1 g(x, y, z) &= \sum_{k=l}^l g(x_k, y, z) h_{lk}^0(x), & J_2 g(x, y, z) &= \sum_{j=l}^l g(x, y_j, z) h_{2j}^0(y), \\ J_3 g(x, y, z) &= \sum_{s=l}^l g(x, y, z_s) h_{3s}^0(z), \\ \tilde{J}_1 g(x, y, z) &= \sum_{\tilde{k}=l}^{l^{3/2}} g(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z) \tilde{h}_{l\tilde{k}}^0(x), & \tilde{J}_2 g(x, y, z) &= \sum_{\tilde{j}=l}^{l^{3/2}} g(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y), \\ \tilde{J}_3 g(x, y, z) &= \sum_{\tilde{s}=l}^{l^{3/2}} g(x, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z), \\ \underline{J}_1 g(x, y, z) &= \sum_{\underline{k}=l}^{l^3} g(\underline{x}_{\underline{k}}, y, z) \underline{h}_{l\underline{k}}^0(x), & \underline{J}_2 g(x, y, z) &= \sum_{\underline{j}=l}^{l^3} g(x, \underline{y}_{\underline{j}}, z) \underline{h}_{2\underline{j}}^0(y), \\ \underline{J}_3 g(x, y, z) &= \sum_{\underline{s}=l}^{l^3} g(x, y, \underline{z}_{\underline{s}}) \underline{h}_{3\underline{s}}^0(z). \end{aligned}$$

Розглянемо оператор кусково-сталого інтерполяції, побудований на основі економних схем інтерполяції [2]

$$\begin{aligned} \underline{J} g(x, y, z) &= J_1 \tilde{J}_2 \underline{J}_3 g(x, y, z) + J_1 \tilde{J}_3 \underline{J}_2 g(x, y, z) - J_1 \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 g(x, y, z) + \\ &+ J_2 \tilde{J}_1 \underline{J}_3 g(x, y, z) + J_2 \tilde{J}_3 \underline{J}_1 g(x, y, z) - J_2 \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 g(x, y, z) + \\ &+ J_3 \tilde{J}_1 \underline{J}_2 g(x, y, z) + J_3 \tilde{J}_2 \underline{J}_1 g(x, y, z) - J_3 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 g(x, y, z) - \\ &- J_1 \underline{J}_2 \underline{J}_3 g(x, y, z) - J_1 \underline{J}_3 \underline{J}_2 g(x, y, z) - J_2 \underline{J}_3 \underline{J}_1 g(x, y, z) + J_1 \underline{J}_2 \underline{J}_3 g(x, y, z). \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралу

$$I^3(g, \omega) = \int_0^l \int_0^l \int_0^l e^{i\omega t(x,y,z)} dx dy dz \quad (1)$$

пропонується формула:

$$\Phi^3(g, \omega) = \int_0^l \int_0^l \int_0^l e^{i\omega Jg(x,y,z)} dx dy dz \quad (2)$$

Для наближеного обчислення інтегралу (1) за формулою (2) отримаємо похибку наближення на класі диференційовних функцій.

Теорема. Для кубатурної формули $\Phi^3(g, \omega)$ обчислення $I^3(g, \omega)$ справедлива наступна оцінка:

$$|I^3(g, \omega) - \Phi^3(g, \omega)| \leq \min \left(2, \frac{\omega(144M_g + 12\tilde{M}_g + \tilde{M}_g)}{64l^3} \right)$$

Список використаних джерел:

1. Garcke, Jochen. Sparse Grids in a Nutshell. In Garcke, Jochen; Griebel, Michael (eds.). Sparse Grids and Applications. Springer. 2012. pp. 57–80. ISBN 978-3-642-31702-6.
2. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer, 2021. p. 378. DOI:10.1007/978-3-030-90908-6
3. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 447 с.
4. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.
5. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : Наук. думка, 2017. – 336 с.

ОДНОРІДНА АПРОКСИМАЦІЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ

Русаков В.О.

E-mail: vrusakov66@gmail.com

В цій роботі ми розглядаємо розподіли Гурса – розподіли рангу 2, великий вектор зросту котрих росте на 1 з кожним кроком, поки не буде отримано розмірність усього простору. Ці розподіли тісно пов'язані з нелінійною теорією керування та природно виникають у прикладних задачах [1]. Одне з відкритих питань щодо цих розподілів є отримання їхньої однорідної апроксимації та дослідження її поведінки [2,3].

Розглянемо наступну нелінійну керовану систему, яка відповідає розподілу Гурса типу GGSG:

$$\dot{x}_1 = x_5 u_2 \quad \dot{x}_2 = x_3 x_5 u_2 \quad \dot{x}_3 = x_4 x_5 u_2 \quad \dot{x}_4 = u_2 \dot{x}_5 = (x_6 + 1) u_2 \quad \dot{x}_6 = u_1 \quad (1)$$

Маємо на меті отримати однорідну апроксимацію даної системи.

Відомо, що траєкторія системи (1), яка починається в точці $x^0 = 0$, може бути записана у вигляді ряду ітерованих інтегралів:

$$x(t) = \sum_{k \geq 1, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq 2} c_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1 \dots i_k}(t, u), \quad (2)$$

де ітеровані інтеграли мають вигляд

$$\eta_{i_1 \dots i_k}(t, u) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \dots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1,$$

а $c_{i_1 \dots i_k}$ – це сталі коефіцієнти, отримані таким чином:

$$c_{i_1 \dots i_k} = X_{i_k} \dots X_{i_1} E(0), \quad E(x) \equiv x.$$

Більш того, елементи $\eta_{i_1 \dots i_k}$ породжують вільну асоціативну алгебру F з операцією конкатенації. Будемо позначати L відповідну алгебру Лі, яка породжена елементами η_1, η_2 з операцією дужок Лі.

Для отримання однорідної апроксимації системи (форм. 1) ми розкладаємо ряд системи (форм. 2) за іншим базисом алгебри F . При побудові суттєво використана коренева підалгебра Лі [4,5], що породжена системою (форм. 1). Ми будемо позначати її L_{X_1, X_2} .

Проілюструємо два з можливих варіантів вибору базису алгебри F .

Побудова базису за допомоги ортопроекцій.

Розглянемо алгоритм побудови апроксимації, запропонований в [4]. А саме, знайдемо 6 (відповідає розмірності системи) таких лінійно незалежних елементів $l_1, \dots, l_6$ алгебри L , щоб виконувалась рівність

$$\text{Lin}\{l_1, \dots, l_6\} + L_{X_1, X_2} = L.$$

Для розглянутої системи (форм. 1) цими елементами будуть:

$$l_1 = \eta_1, \quad l_2 = \eta_2, \quad l_3 = [\eta_1, \eta_2], \quad l_4 = [[\eta_1, \eta_2], \eta_2], \\ l_5 = [[\eta_1, \eta_2], \eta_2], \quad l_6 = [[\eta_1, \eta_2], \eta_2], \eta_2].$$

Далі, якщо ми побудуємо лівий ідеал, породжений алгеброю L_{X_1, X_2} , то можемо обрати базисні елементи $\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_6$ в алгебрі F наступним чином: $\tilde{l}_i$ обираємо так, щоб цей елемент був ортопроекцією l_i на множину $J_{X_1, X_2}^\perp$ – ортогональне доповнення до лівого ідеалу алгебри L_{X_1, X_2} . Для системи (форм. 1) отримаємо:

$$\tilde{l}_1 = \eta_1, \quad \tilde{l}_2 = \eta_2, \quad \tilde{l}_3 = [\eta_1, \eta_2], \quad \tilde{l}_4 = [[\eta_1, \eta_2], \eta_2], \\ \tilde{l}_5 = [[\eta_1, \eta_2], \eta_2], \quad \tilde{l}_6 = \eta_{122222} - \frac{16\eta_{212222}}{5} + \frac{14\eta_{221222}}{5} + \\ + \frac{4\eta_{222122}}{5} - \frac{11\eta_{222212}}{5} + \frac{4\eta_{222221}}{5}.$$

Тоді однорідна апроксимація буде мати наступний вигляд:

$$\dot{x}_1 = u_1 \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = -x_1 u_2 + x_2 u_1 \quad \dot{x}_4 = \frac{x_2^2 u_1}{2} + \left(-\frac{x_1 x_2}{2} - \frac{3x_3}{2}\right) u_2 \quad \dot{x}_5 = \\ = \frac{x_2^3 u_1}{6} + \left(-\frac{x_1 x_2^2}{6} - \frac{x_2 x_3}{2} - \frac{5x_4}{3}\right) u_2 \quad \dot{x}_6 = \frac{x_2^5 u_1}{120} + \left(-\frac{x_1 x_2^4}{120} - \frac{x_2^3 x_3}{40} - \frac{x_2^2 x_4}{12} - \frac{7x_2 x_5}{20}\right) u_2$$

Зауважимо, що отримана система виглядає доволі громіздкою.

Побудова біортогонального базису.

Замість того щоб знаходити ортопроекції, ми можемо побудувати біортогональний базис до базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта, який породжений $l_1, \dots, l_6$ і базисом L_{X_1, X_2} [5]. Для розглянутої системи (форм. 1) він буде мати вигляд:

$$d_1 = \eta_1, \quad d_2 = \eta_2, \\ d_3 = \eta_{21}, \quad d_4 = \eta_{221} + \eta_{212}, \quad d_5 = \eta_{2122} + \eta_{2212} + \eta_{2221}, \\ d_6 = \eta_{212222} + \eta_{221222} + \eta_{222122} + \eta_{222212} + \eta_{222221},$$

а однорідна апроксимація буде мати вигляд:

$$\dot{x}_1 = u_1 \quad \dot{x}_2 = u_2 \quad \dot{x}_3 = x_1 u_2 \quad \dot{x}_4 = \frac{x_1 x_2}{2} u_2 \quad \dot{x}_5 = \frac{x_1 x_2^2}{2} u_2 \quad \dot{x}_6 = \frac{x_1 x_2^4}{24} u_2$$

Бачимо, що система виглядає набагато простіше, ніж попередня апроксимація, де були використані ортопроекції.

Інший біортогональний базис.

Якщо будувати базис Пуанкаре-Біркгофа-Вітта, помінявши місцями l_1 і l_2 , отримаємо інший біортогональний базис і іншу однорідну апроксимацію. А саме, отримаємо наступний базис:

$$d_1 = \eta_2, \quad d_2 = \eta_1, \quad d_3 = \eta_{12}, \quad d_4 = \eta_{122}, \quad d_5 = \eta_{1222}, \quad d_6 = \eta_{122222}$$

і однорідну апроксимацію

$$\{\dot{x}_1 = u_2 \dot{x}_2 = u_1 \dot{x}_3 = x_1 u_1 \dot{x}_4 = \frac{x_1^2}{2} u_1 \dot{x}_5 = \frac{x_1^3}{6} u_1 \dot{x}_6 = \frac{x_1^5}{120} u_1$$

В результаті отримаємо ще більш просту систему – права частина системи буде залежати лише від однієї змінної x_1 .

Отже, однорідна апроксимація може досить сильно відрізнитись в залежності від того, як обрати базис алгебри F . Зауважимо, що при цьому отримані системи переходять одна в одну поліноміальною заміною змінних.

Список використаних джерел.

1. Jean F. The car with N Trailers: characterization of the singular configurations. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol.1, 1996, 241–266.
2. Mormul, P. Do moduli of Goursat distributions appear on the level of nilpotent approximations?, in J. Brasselet and M. Ruas (eds), Real and Complex Singularities, Vol. 39 of Trends in Mathematics, Birkhauser Basel, 2006, 229–246.
3. Mormul, P. Real moduli in local classification of Goursat flags, Hokkaido Math J. 34, 2005, 1–35.
4. Sklyar, G., Barkhayev, P., Ignatovich, S., Rusakov V., Implementation of the algorithm for constructing homogeneous approximations of nonlinear control systems. Math. Control Signals Syst. 34, 2022, 883–907.
5. Sklyar, G.M., Ignatovich, S.Yu.: Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 504, 2014, 1–88.

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ МНОЖИННОЇ ЛІНІЙНОЇ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ

Ревіна К. І.

E-mail: kseniia.revina@student.karazin.ua

Науковий керівник: к.е.н., доц. Панасенко О. В.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

У сучасних умовах розвитку економіки важливого значення набуває використання економіко-математичних методів для аналізу та прогнозування соціально-економічних процесів. Зокрема, економетричне моделювання дозволяє кількісно оцінити вплив різних факторів на результативні показники та виявити основні закономірності їх взаємозв'язку. Одним із найпоширеніших інструментів такого аналізу є множинна лінійна регресія, яка дає змогу дослідити вплив кількох незалежних змінних на залежну змінну одночасно. Це особливо

актуально для макроекономічних досліджень, де результативні показники формуються під впливом комплексу взаємопов'язаних факторів.

Розглядається задача побудови множинної лінійної економетричної моделі залежності результативної ознаки Y від сукупності факторних ознак $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ на основі статистичних даних за певний період часу. Задача полягає у побудові, оцінюванні та використанні множинної лінійної економетричної моделі для аналізу та прогнозування економічного показника [1].

Для побудови множинної економетричної моделі було обрано систему показників, яка відповідає класичним підходам макроекономічного аналізу та теорії виробничих функцій. Результативною ознакою виступає валовий внутрішній продукт (ВВП), який є узагальнюючим показником економічного розвитку країни та широко використовується у наукових дослідженнях. До складу факторних змінних включено:

X_1 – зайнятість населення (праця). Даний показник характеризує обсяг використання трудових ресурсів у економіці. Згідно з економічною теорією, праця є одним із базових факторів виробництва, тому її включення до моделі є обов'язковим.

X_2 – валове нагромадження капіталу (інвестиції). Відображає рівень інвестиційної активності в країні та визначає можливості розширення виробництва. Капітал є другим ключовим фактором економічного зростання.

X_3 – показник освіти (людський капітал). Характеризує якість робочої сили та рівень розвитку людського потенціалу. У сучасних умовах саме людський капітал виступає важливим драйвером економічного розвитку.

Таким чином, обрана система факторів: має чітке економічне обґрунтування; відповідає класичній виробничій функції; дозволяє комплексно оцінити вплив основних ресурсів на ВВП.

Модель має вигляд:

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon,$$

де:

Y – залежна змінна (результативний показник);

x_1, x_2, x_3 – незалежні змінні (факторні показники);

a_0 – вільний член моделі;

a_1, a_2, a_3 – параметри моделі, що характеризують вплив відповідних факторів;

ε – випадкова похибка.

Метою дослідження є оцінювання параметрів моделі на основі наявних статистичних даних; аналіз статистичної значущості моделі та її параметрів; перевірка адекватності побудованої моделі; дослідження сили та напрямку впливу

факторних змінних на результативну ознаку; розрахунок прогнозного значення $Y_{\text{пр}}$ для значень $X_{1 \text{ пр}}, X_{2 \text{ пр}}, X_{3 \text{ пр}}$, які перебувають за межами базового періоду.

Інформаційною базою дослідження виступили дані міжнародних організацій, зокрема World Bank, International Labour Organization та United Nations Development Programme [2-4]. У дослідженні використано дані за 2010 – 2022 роки. Обмеження вибірки саме цим періодом пояснюється кількома причинами:

1. Доступність та зіставність даних. Починаючи з 2010 року, статистичні дані мають узгоджену методологію розрахунку, що забезпечує їх коректне порівняння.
2. Уникнення структурних розривів. Дані після 2022 року характеризуються значними структурними змінами економіки, пов'язаними з воєнними подіями, що може призводити до: різких викидів (outliers); порушення стабільності економічних зв'язків; зниження якості економетричної моделі.
3. Достатній обсяг вибірки для оцінювання багатофакторної моделі з трьома пояснювальними змінними.

Оцінки параметрів моделі отримано за методом найменших квадратів (МНК). Незалежні змінні подано у вигляді матриці X . Далі обчислюється транспонована матриця X^T , після чого формується матриця $X^T X$ та вектор $X^T Y$, де Y – вектор спостережень залежної змінної. Після знаходження оберненої матриці $(X^T X)^{-1}$ оцінки параметрів моделі визначаються за формулою:

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

На основі вихідних даних в результаті обчислень були отримані параметри моделі $a_0 = -5871,162$; $a_1 = 30,357$; $a_2 = 4,557$; $a_3 = 6618,241$; $\hat{Y} = -5871,162 + 30,357 * X_1 + 4,557 * X_2 + 6618,241 * X_3$. Загалом, усі фактори мають додатний вплив на результативний показник, що узгоджується з економічною теорією, а найбільш вагомим фактором у моделі виступає людський капітал.

Аналіз результатів регресійної моделі.

Загальна якість моделі. Отримані результати свідчать про високу якість побудованої моделі.

Множинний коефіцієнт кореляції ($R = 0,947$) вказує на дуже тісний зв'язок між ВВП та пояснювальними змінними.

Коефіцієнт детермінації ($R^2 = 0,896$). Близько 89,6% варіації ВВП пояснюється включеними факторами, що є високим показником для економічних моделей.

Нормований $R^2 = 0,862$. Підтверджує, що модель не є перенавантаженою зайвими змінними.

Стандартна помилка 12,37 свідчить про відносно невелике відхилення фактичних значень від розрахункових.

Аналіз статистичної значущості коефіцієнтів регресії за допомогою t-критерію Стюдента.

$t_{a0} = -7,475$; $t_{a1} = 6,158$; $t_{a2} = 2,493$; $t_{a3} = 7,552$; $t_{\text{табл}} = 2,262$. Розраховані значення більші за табличне. Отже можна зробити висновок, що отримані значення для коефіцієнтів при X_1 , X_2 та X_3 є статистично значущими. Тобто X_1 , X_2 та X_3 істотно впливають на Y .

Дисперсійний аналіз (F-критерій): $F = 25,963$; $F_{\text{табл}} = 3,863$. Оскільки розраховане значення статистики Фішера більше за табличне, побудована модель є статистично значущою, тобто зв'язок між залежною та пояснювальними змінними істотний.

Отримані результати узгоджуються з економічною теорією: основний внесок у ВВП забезпечує праця; інвестиції стимулюють економічне зростання; людський капітал відіграє стратегічну роль. Особливо важливо, що показник освіти має високий коефіцієнт, що свідчить про довгостроковий вплив якості робочої сили на економіку.

Отже, побудована множинна лінійна економетрична модель є адекватною та статистично значущою, як в цілому, так і по окремим параметрам, тоді отримане рівняння залежності може бути використане для прогнозу. Для прогнозних розрахунків прийнято значення факторів: $X_{1\text{ пр}} = 20$, $X_{2\text{ пр}} = 14$, $X_{3\text{ пр}} = 0,9$. З урахуванням того, що на якість моделі суттєво впливає обсяг вибірки, доцільно використовувати не лише точкову оцінку прогнозу, а й визначати довірчі інтервали. Розраховане прогнозне значення результативної змінної становить $Y_{\text{пр}} = 756,189$; а величина довірчого інтервалу $\Delta Y_{\text{пр}} = 191,584$; Це свідчить про те, що за умови рівня зайнятості населення 20 млн осіб, валового нагромадження капіталу на рівні 14 та індексу освіти 0,9, очікуване значення валового внутрішнього продукту перебуватиме в межах від 564,605 до 947,774 млрд дол..

Побудована модель може бути ефективно застосована для прогнозування, що підтверджено розрахованим прогнозним значенням ВВП та відповідним довірчим інтервалом. Загалом результати дослідження узгоджуються з економічною теорією та підкреслюють важливу роль трудових ресурсів, інвестицій і рівня освіти у забезпеченні економічного зростання.

Список використаних джерел:

1. Гур'янова Л. С., Клебанова Т. С., Сергієнко О. А., Прокопович С. В. Економетрика : навчальний посібник для студентів наряду підготовки

- "Економічна кібернетика" всіх форм навчання. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. 384 с. (Укр. мов.)
2. International Labour Organization. ILOSTAT database. URL: <https://ilostat.ilo.org> (дата звернення: 10.04.2026).
 3. United Nations Development Programme. Human Development Reports. URL: <https://hdr.undp.org/> (дата звернення: 10.04.2026).
 4. World Bank. GDP (current US\$); Gross capital formation (% of GDP). URL: <https://data.worldbank.org/> (дата звернення: 10.04.2026).

ПОВНА ПОХИБКА ДЛЯ КУБАТУРНОЇ ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДАНИМИ НА ЛІНІЯХ

Хурдей Є.Л.

E-mail: yevheniia.khurdei@karazin.ua

Науковий керівник: Нечуйвітер О. П.

*Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія»
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна*

При наближеному обчисленні інтегралів за кубатурними формулами природно виникає необхідність дослідження похибок різної природи. Зокрема, загальна похибка формується як результат сукупного впливу кількох чинників: неточності вхідної інформації, апроксимаційних властивостей самої кубатурної формули та похибок, пов'язаних із чисельною реалізацією алгоритму.

У зв'язку з цим доцільно розглядати повну похибку як суму трьох основних складових: неусувної, методу та обчислювальної. Неусувна похибка обумовлена тим, що функції відомі лише наближено. Це є характерним для практичних задач, де дані отримуються в результаті вимірювань.

Похибка методу виникає внаслідок заміни точного інтеграла кубатурною формулою і визначається її порядком точності та властивостями класу функцій. Обчислювальна похибка пов'язана з виконанням арифметичних операцій у машинній арифметиці та накопиченням похибок заокруглення.

Наразі в задачах чисельного інтегрування функцій багатьох змінних важливу роль відіграє спосіб задання вихідної функції. У багатьох прикладних задачах функція не є відома аналітично, не задається значеннями в точках, а визначається слідами на взаємноперпендикулярних лініях. Такий спосіб задання інформації є типовим для задач томографії, дистанційного зондування та обробки експериментальних даних, де результат вимірювань отримується вздовж окремих напрямів або на фіксованих перерізах області [6].

Провести аналіз похибок кубатурних формул для наближеного обчислення осцилюючих інтегралів, де вихідна інформація задається, зокрема даними на лініях, є на часі, оскільки дозволяє обґрунтувати ефективність запропонованих підходів, визначити область їх застосування та встановити залежність точності від параметра дискретизації і частоти осциляцій.

Розглянемо клас функцій, визначених на $G = [0, I]^2$

$$H^{2,1}(M_u, \underline{M}_u, \tilde{M}_u) = \{u = u(x, y), (x, y) \in G:$$

$$|u(x, y)| \leq M_u, |u_x(x, y)| \leq \underline{M}_u, |u_y(x, y)| \leq \underline{M}_u, |u_{xy}(x, y)| \leq \tilde{M}_u\}.$$

Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I(g, \omega) = \int_0^I \int_0^I e^{i\omega g(x, y)} dx dy, |\omega| \geq 2\pi \quad (1)$$

пропонується кубатурна формула із залученням інформаційних операторів [4, 5], які використовують дані про функцію $g(x, y)$ на лініях та кусково-сталі сплайни в якості допоміжних функцій.

Введемо позначення:

$$h_{0k} = \{I, x \in X_k, 0, x \notin X_k, \quad k = \underline{1, l}, \quad H_{0j} = \{I, x \in Y_j, 0, x \notin Y_j, \quad j = \underline{1, l},$$

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \underline{1, l}, \Delta = I/l.$$

Розглянемо оператор

$$\begin{aligned} Tg(x, y) = & \sum_{k=1}^l g(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^l g(x, y_j) H_{0j}(y) - \\ & - \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l g(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y). \end{aligned}$$

Для наближеного обчислення інтегралу (1) пропонується кубатурна формула [2, 3]

$$\Phi(g, \omega) = \int_0^I \int_0^I e^{i\omega Tg(x, y)} dx dy \quad (2)$$

Нехай $g(x, y) \in H^{2,l}(M_g, \underline{M}_g, \tilde{M}_g)$, $\tilde{g}(x, y) \in H^{2,l}(M_{\tilde{g}}, \underline{M}_{\tilde{g}}, \tilde{M}_{\tilde{g}})$. Повна похибка має наступний вигляд

$$\Delta_\omega = |I(g, \omega) - \Phi(g, \omega)| + |\Phi(g, \omega) - \tilde{\Phi}(\tilde{g}, \omega)| + |\tilde{\Phi}(\tilde{g}, \omega) - \hat{\Phi}(\tilde{g}, \omega)|,$$

де перший доданок відповідає похибці методу, другий – неусувній похибці, зумовленій неточності даних функції на лініях, а третій – похибці заокруглення.

Теорема 1. [3] Нехай $g(x, y) \in H^{2,l}(M_g, \underline{M}_g, \tilde{M}_g)$, тоді

$$|I(g, \omega) - \Phi(g, \omega)| \leq \min\left(2, \frac{\omega \tilde{M}_g}{16l^2}\right).$$

Проведемо дослідження неусувної похибки. Нехай замість точних значень функції на лініях $g(x_k, y)$, $g(x, y_j)$, $g(x_k, y_j)$ відомі їх наближені значення $\tilde{g}(x_k, y)$, $\tilde{g}(x, y_j)$, $\tilde{g}(x_k, y_j)$. Побудуємо за ними наближену кубатурну формулу $\tilde{\Phi}(\tilde{g}, \omega)$. Тоді неусувна похибка $\Delta_\omega^{neuc} = |\Phi(g, \omega) - \tilde{\Phi}(\tilde{g}, \omega)|$.

Теорема 2. Неусувна похибка задовольняє оцінку

$$\Delta_\omega^{neuc} \leq \min\left(2, \omega(\delta g_x + \delta g_y + \delta g_{xy})\right),$$

де

$$\delta g_x = |g(x_k, y) - \tilde{g}(x_k, y)|, \delta g_y = |g(x, y_j) - \tilde{g}(x, y_j)|,$$

$$\delta g_{xy} = |g(x_k, y_j) - \tilde{g}(x_k, y_j)|.$$

У процесі практичної реалізації кубатурної формули (2) для визначеного інтеграла (1) додатково до похибки методу та неусувної виникає обчислювальна похибка, зумовлена виконанням арифметичних операцій у машинній арифметиці. Основним джерелом цієї похибки є накопичення похибок округлення при обчисленні сум. У класичному підході похибка заокруглення розглядається як результат незалежних збурень кожного доданка сум. Така інтерпретація приводить до оцінок типу Уілкінсона, де похибка представляється як сума локальних помилок і похибки їх накопичення.

Водночас більш точний підхід, запропонований Хайемом, дозволяє інтерпретувати обчислену суму інакше. А саме, обчислений результат можна розглядати не як суму окремо спотворених доданків, а як незначне відносне збурення точного значення суми.

Розглянемо метод оцінювання похибки, який наведено в роботі [1]. Для послідовного сумування n чисел $a_1, \dots, a_n$ має місце оцінка

$$fl(\sum_{m=l}^n a_m) = \sum_{m=l}^n a_m + \theta_{n-l} \sum_{m=l}^n |a_m|, |\theta_{n-l}| \leq \gamma_{n-l} \quad (3)$$

де $\gamma_{n-l} = \frac{(n-l)u}{l-(n-l)u}$, u – машинна точність.

Позначимо

$$S_l(x, y) = \sum_{k=l}^l \tilde{g}(x_k, y) h_{0k}(x), \quad S_2(x, y) = \sum_{j=l}^l \tilde{g}(x, y_j) H_{0j}(y),$$

$$S_3 = \sum_{k=l}^l \sum_{j=l}^l \tilde{g}(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y),$$

а також $\hat{S}_l(x, y)$, $\hat{S}_2(x, y)$, $\hat{S}_3(x, y)$ машинні значення цих сум.

Тоді

$$T\tilde{g}(x, y) = S_l(x, y) + S_2(x, y) - S_3(x, y),$$

$$\hat{T}\tilde{g}(x, y) = \hat{S}_l(x, y) + \hat{S}_2(x, y) - \hat{S}_3(x, y).$$

Застосовуючи оцінку (3) для кожної суми та оцінюючи

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega}^{\text{заокр}} &= |\tilde{\Phi}(\tilde{\square}, \square) - \hat{\Phi}(\tilde{\square}, \square)| \\ &= \left| \int_0^l \int_0^l e^{i\omega T\tilde{g}(x,y)} dx dy - \int_0^l \int_0^l e^{i\omega \hat{T}\tilde{g}(x,y)} dx dy \right|, \end{aligned}$$

отримаємо наступну теорему.

Теорема 3. За умов і позначень, введених вище, для похибки заокруглення $\Delta_{\omega}^{\text{заокр}}$ справедлива нерівність

$$\Delta_{\omega}^{\text{заокр}} \leq \min \left(2, \omega M_{\tilde{g}} (2\gamma_{l-l} + \gamma_{l^2-l}) \right).$$

Список використаних джерел:

1. Higham N. J. Accuracy and stability of numerical algorithms. 2nd ed. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 680 p.
2. Khurdei Y. L., Nefodova I. V., Zaborniy A. V., Letuta A. A. Numerical integration of rapidly oscillating functions using reconstruction operators based on data on lines. Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2025. Iss. 28. P. 137–154. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.137-154
3. Mezhuiev V., Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-

- dimensional irregular highly oscillating functions. U.P.B. Sci. Bull., Series A. 2018.Vol. 80. Iss. 3. P. 169 – 182.
4. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer, 2021. p. 378. DOI:10.1007/978-3-030-90908-6
 5. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 447 с.
 6. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.

ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ. ОБЕРТАННЯ МАТРИЦІ КОРЕЛЯЦІЙ

Крічфалуши Д. С.

E-mail: krichfalushy_daria@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Жуга Г. О.

E-mail: g.zhuga@gmail.com

Харківський національний університет радіоелектроніки

Науковий керівник: Жуга Г. О.

Анотація. З кожним викликом сьогодення стає зрозумілим те, що розвиток та оптимізація алгоритмів прикладної математики, є невід’ємними частинами успішного вирішення наявних науково-технічних питань. Так, в наш час існує велика кількість навмисних чи ненавмисних інтерференцій, які перешкоджають коректному функціонуванню GPS навігації. Існує безліч математичних алгоритмів, які захищають сигнал і не допускають збою у навігації. Серцем цих методів є саме матриця кореляцій R . Проте, для вирішення такого роду задач, ми маємо застосувати до неї дію обернення, що вимагає значних обчислювальних ресурсів.

У статті розглядаються математичні основи та прикладні алгоритми, їхня оцінка та порівняння для ефективного обернення кореляційної матриці сигналів у задачах *цифрової обробки сигналів* (ЦОС). Детально проаналізовані алгоритми:

Узагальнена Факторизація Левінсона та QR-розклад за допомогою обернаних Гівенса.

1. Вступ. Модель сигналу та утворення кореляцій

Сучасна цифрова обробка сигналів (ЦОС) є потужним інструментом для розв'язання широкого спектра прикладних задач: від радіолокації та систем зв'язку до обробки медичних сигналів та систем шумозаглушення. Більшість реальних сигналів – будь то корисна інформація, шум або завади – мають випадкову природу. Саме тому для їхнього ефективного аналізу та обробки використовується апарат Теорії випадкових процесів.

Модель сигналу. Нехай маємо систему, що складається з антенної решітки N елементів. Сигнал, який надходить на кожний m -й елемент,

$1 \leq m \leq N$, є функцією часу, яку зазвичай представляють через комплексну обвідну $v_m(t)$ у базовій смузі частот:

$$V_m(t) = \text{Re}[v_m(t)e^{j\omega t}], \quad (1)$$

Щоб зібрати інформацію з кожного елемента антенної решітки, зручно розглядати вектор сигналів $v(t)$:

$$v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)]^T.$$

Цей вектор описує стан електромагнітного поля на всій апертурі антени в конкретний момент часу.

Утворення кореляцій. Кореляція між сигналами виникає тоді, коли випадкові процеси в різних каналах мають спільне джерело, або існує взаємозв'язок (подібність) між двома різними сигналами або між сигналом та його власною копією.

У задачах ЦОС кореляція має два основні виміри:

1. *Просторова кореляція:* виникає через те, що один і той самий сигнал доходить до різних елементів антенної решітки з різними фазовими затримками, що залежать від геометрії антени та напрямку на джерело.

2. *Часова кореляція:* відображає статистичний зв'язок між відліками одного сигналу в різні моменти часу.

Таким чином, інформацію про кореляції (взаємозв'язки) сигналів також зручно збирати у векторній (матричній) формі. Математичним вираженням кореляційної матриці (КМ) є математичне сподівання від добутку вектора сигналів на його ермітово-спряжений вектор:

$$R = E[v(t)v^H(t)] \quad (2)$$

Де $\{\cdot\}^H = (\{\cdot\})^T$ – ермітове спряження (комплексне спряження і транспонування).

Фізичний зміст КМ:

1. *Діагональні елементи* (R_{mm}) – середня потужність сигналу у кожному окремому каналі.
2. *Позадіагональні елементи* (R_{mn}) – ступінь кореляції між m та n компонентами вектора сигналів: Якщо вони близькі до нуля, то сигнали є незалежними, а якщо показник великий, то сигнали мають спільну структуру.

Для операції обернення матриці R^{-1} обов'язково мають виконуватися дві умови:

$$\forall x \in C: x^H R x > 0$$

$$\det(R) > 0$$

Не складно помітити, що зі збільшенням каналів сигналу, збільшуватиметься й розмірність матриці R . Саме тому виникає проблема оптимізації її обернення, адже обчислювальна складність лише цієї дії дорівнює $O(N^3)$

2. Задачі, де виникає потреба в обертанні КМ

Важливість ролі кореляційної матриці у ЦОС важко переоцінити. Вона трапляється усюди, де є робота із сигналами і датчиками.

Проте зараз ми детальніше зупинимось на методі Адаптивного формування променя **Minimum Variance Distortionless Response (MVDR)**.

Технологія MVDR може застосовуватися в антенних решітках, радіолокаційних системах, ультразвукових системах та мікрофонних решітках для динамічної оптимізації діаграми спрямованості антенної або сенсорної решітки в реальному часі. З математичної точки зору формування променя є задачею оптимізації:

$$\{w^H R w \rightarrow \min s.t. w^H a(\theta) = 1$$

Де w – оптимальний ваговий вектор діаграми спрямованості, який і треба знайти для розв'язку системи.

$a(\theta)$ – направляючий вектор сигналу (steering vector);

R – кореляційна матриця сигналів, разом із завадами та шумами.

Для розв'язання цієї задачі оптимізації застосовуємо метод Лагранжа, і за допомогою множників Лагранжа знаходимо розв'язок:

$$w_{opt} = \frac{R^{-1} a(\theta)}{a^H(\theta) R^{-1} a(\theta)} \quad (3)$$

Даний метод максимально пригнічує завади або шуми з усіх напрямків, крім бажаного $a(\theta)$, і прямо вимагає обчислення добутку $R^{-1} a(\theta)$ для кожного кандидата θ .

3. Алгоритми обертання кореляційної матриці

Враховуючи структуру кореляційних матриць (ермітова, теплицева), розроблено спеціалізовані, суттєво ефективніші алгоритми знаходження оберненої кореляційної матриці. Наразі найбільш вживані та ефективні є методи побудови факторизованих або рекурентних представлень, що реалізують дію $R^{-1} \cdot v$ на довільний вектор v .

3.1 Узагальнена факторизація Левінсона (УФЛ)

Для блочно-теплицевих матриць (*матриці, які мають структуру матриці Теплиця, але їхніми елементами є не числа, матриці однакового розміру*), характерних для задач просторово-часової адаптивної обробки (STAP), застосовується УФЛ. На відміну від класичного скалярного випадку, УФЛ будує мультиплікативне представлення оберненої матриці через добуток елементарних розріджених множників:

$$\tilde{\Psi} = A_m \cdot A_{m-1} \cdot \dots \cdot A_1 \quad (4)$$

Структура кожного A_i множника однозначно відповідає структурі i -ої ступені *Універсального Решітчастого Фільтра (УФР)*.

Параметрами секцій є матриці $\alpha_m(l)$ та $\beta_m(l)$, що дозволяє одночасно враховувати просторову та часову кореляції між каналами.

$$\varepsilon_m(l) = \|s_m(l) \ 0 \ 0 \ s_m(l)\| \cdot \|\alpha_m(l) \ 1 \ 1 \ \beta_m(l)\| \quad (5)$$

Де $s_m(l)$ – нормуючий множник (для чисельної стійкості).

Цей алгоритм є спеціалізованим рекурентним методом розв'язання СЛАР, найбільш ефективним для обробки одновимірних стаціонарних процесів, де КМ має *теплицеву структуру*. Це дозволяє знизити обчислювальну складність до $O(N^2)$.

Означення. КМ R є *теплицевою*, якщо її елементи залежать від різниці індексів $[R]_{ij} = r(i - j)$, де $r(k)$ – автокореляційна послідовність процесу:

$$R = (r(0) \ \dots \ r(N-1) \ : \ \ddots \ : \ r(N-1) \ \dots \ r(0)) \quad (6)$$

3.2 QR-розклад за допомогою обертань Гівенса

Цей метод використовується для чисельно стійкого розв'язання СЛАР.

Будь-яку матрицю A розміру $n \times n$ можна представити у вигляді добутку:

$$A = QR \quad (7)$$

Де Q – унітарна матриця ($Q^H Q = I$), R – верхня трикутна.

Розв'язуємо рівняння $R \cdot w = b$ через QR-розклад:

$$\begin{array}{ll} 1) \tilde{y} = Q^H \cdot b & | \ (O(N^2)) \\ 2) R \cdot w = \tilde{y} & | \ (\text{зворотна підстановка, } O(N^2)) \end{array} \quad (8)$$

Метод Гівенса буде QR-розклад шляхом послідовного анулювання піддіагональних елементів матриці за допомогою “точкових” унітарних перетворень – матриць обертань Гівенса $G(i, j)$. Кожна матриця є одиничною, зміненою лише у чотирьох позиціях:

$$\begin{aligned} [G(i, j)]_{ii} &= c, & [G(i, j)]_{jj} &= c, & [G(i, j)]_{ij} &= -s, \\ [G(i, j)]_{ji} &= s; \end{aligned} \quad (9)$$

Де $c = \frac{|a_{ii}|}{r}$, $s = \frac{a_{ji}}{r}$, $r = \sqrt{|a_{ii}|^2 + |a_{ji}|^2}$.

Матриця Гівенса змінює лише два рядки за одну операцію, що дозволяє поступово трансформувати матрицю трикутного вигляду:

$$R = G_{(n,n-1)}^H \cdots G_{(3,1)}^H \cdot G_{(2,1)}^H \cdot A \quad (10)$$

Завдяки локальності операцій метод ідеально підходить для паралельних обчислень на FPGA. Він лежить в основі алгоритму QRD-RLS, який дозволяє рекурентно оновлювати розв’язок за $O(N^2)$ при надходженні нових даних.

Висновок. Дослідження демонструє, що ефективність сучасних систем адаптивної обробки сигналів критично залежить від вибору алгоритму обертання КМ. Обертання кореляційної матриці у задачах ЦОС можна досягти не через явне обчислення всіх елементів R^{-1} , а через побудову факторизованих або рекурентних представлень, що значно спрощує роботу апаратного забезпечення та підвищує ефективність роботи.

Список використаних джерел:

1. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations. 4th ed. — Johns Hopkins University Press, 2013.
2. Eduardo Ortega, Alejandro Vicente, Agustín Martínez, Óscar Rodríguez, Manuel Prieto, Pablo Parra, Antonio Da Silva, Sebastián Sánchez, Enhancing efficiency in spaceborne phased array systems: MVDR algorithm and FPGA integration, 2024.
3. Warnick & Jensen “ECEn 665: Antennas and Propagation for Wireless Communications 9 2.2 Antenna Parameters.”, 2017
4. Voevodin V. V., Tyrtshnikov E. E. Vychislitelnyye protsessy s Toeplitsevymi matritsami. — М.: Nauka, 1987.
5. Леховицький Д. І. Перспективні напрямки уніфікації цифрових адаптивних систем STAP. — НДЦ ПРЕСТ, 2006.
6. Лекційні матеріали: Чисельні методи лінійної алгебри. — НТУУ КПІ, 2024.

ПРОГНОЗУВАННЯ КІЛЬКОСТІ ЛЮДЕЙ У ПРИМІЩЕННІ З ВИКОРИСТАННЯМ ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Гук К.Г.

E-mail: huk@365.dnu.edu.ua

Науковий керівник: Шевельова А.Є.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Метою дослідження є розроблення моделі для прогнозування кількості людей у приміщенні на основі параметрів якості повітря, зокрема концентрації CO₂, із використанням методів штучного інтелекту. Запропонований підхід спрямований на створення інструменту непрямого оцінювання наповненості приміщень без застосування прямих методів підрахунку, зокрема пов'язаних з використанням засобів відеоспостереження або лічильників.

Одним із перспективних підходів до оцінювання кількості людей у приміщенні є аналіз концентрації CO₂ як індикатора присутності та активності людей. Відомо, що у процесі дихання люди виділяють вуглекислий газ, що призводить до зростання його концентрації у замкненому об'ємі. Відповідно, між кількістю людей та рівнем CO₂ існує залежність, яка може бути використана для непрямого оцінювання наповненості приміщення. Разом із тим, дана залежність є складною та нелінійною, оскільки на неї впливають численні фактори: ефективність вентиляції, інфільтрація повітря, відкривання вікон і дверей, активність людей, а також наявність додаткових джерел викиду CO₂. Значна частина цих факторів є невизначеною або важко формалізується, що обмежує застосування класичних аналітичних моделей.

З огляду на це, у дослідженні запропоновано використання штучних нейронних мереж (ШНМ) як інструменту апроксимації складних нелінійних залежностей між концентрацією CO₂ та кількістю людей у приміщенні. Для побудови моделі використано експериментальні дані, отримані в офісних приміщеннях різного типу (конференц-зали, робочі кабінети), обладнаних сучасними сенсорними системами моніторингу якості повітря. Концентрація CO₂ вимірювалась із часовим кроком одна година протягом року, що дозволило врахувати сезонні коливання та зміну режимів вентиляції. Паралельно здійснювався облік кількості людей у приміщеннях за допомогою лічильників або систем відеоспостереження.

Сформований набір даних складався з 7000 записів, що подано у вигляді часових рядів. Дані з приміщень А та В використовувалися для навчання і тестування моделі (з розбиттям вибірки у співвідношенні 80/20), тоді як дані з приміщення С застосовувалися для незалежної перевірки здатності моделі до

узагальнення. Попередня обробка даних включала нормалізацію вхідних параметрів за мінімаксною схемою, що дозволило підвищити ефективність навчання та стабільність обчислень.

Модель прогнозування формувалася як багатошарова нейронна мережа прямого поширення та була реалізована із використанням бібліотеки TensorFlow. Вхідними даними моделі є послідовності значень концентрації CO₂ та відповідних значень кількості людей на попередніх часових інтервалах, тоді як виходом є прогноз кількості людей у наступний момент часу. Для навчання мережі застосовано алгоритм зворотного поширення помилки. Архітектура мережі підбиралася експериментально з урахуванням компромісу між точністю прогнозування та складністю моделі. Було встановлено, що надмірне збільшення кількості прихованих шарів призводить до перенавчання та зниження якості узагальнення.

Оцінювання якості прогнозування здійснювалося за допомогою метрик середньоквадратичної (RMSE) та середньої абсолютної (MAE) помилок. Додатково для статистичної перевірки результатів застосовано критерій Краскала–Уолліса, що дозволило оцінити однорідність вибірок і підтвердити достовірність отриманих результатів. Проведені експерименти показали, що нейронна мережа здатна ефективно відтворювати залежність між концентрацією CO₂ та кількістю людей, забезпечуючи прийнятну точність прогнозування навіть за умов наявності шуму в даних.

Висновки. Отримані результати підтверджують доцільність використання штучних нейронних мереж для задачі непрямого оцінювання кількості людей у приміщенні за даними про якість повітря. Запропонований підхід дозволяє враховувати складні нелінійні залежності та невизначені фактори, що не можуть бути описані аналітичними моделями. Модель демонструє здатність до узагальнення та може бути використана як складова інтелектуальних систем керування вентиляцією та моніторингу мікроклімату в будівлях.

Список використаних джерел:

1. Guo Q. Prediction of Hourly PM2.5 and PM10 Concentrations in Chongqing City in China Based on Artificial Neural Network // Q. Guo, Z. He, Z. Wang // Aerosol and Air Quality Research. – 2023.– Volume 23, issue 6. <https://doi.org/10.4209/aaqr.220448>
2. Gao-wa S. Using Artificial Neural Networks to Predict Indoor Particulate Matter and Tvoc Concentration in an Office Building: Model Selection and Method Development // S. Gao-wa, Z. Zhen, N. Jianchun, L. Linxiao, A. Han, Y. Zhili // Energy and Built Environment. 2024. <https://doi.org/10.1016/j.enbenv.2024.03.001>

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ ШВИДКОДІЇ ДЛЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ

Сдобнов Артем

E-mail: asdobnov16@gmail.com

Науковий керівник: Коробов В.І.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Вступ. Задача швидкодії для нелінійних систем залишається однією з фундаментальних проблем теорії керування. Знаходження точних аналітичних розв'язків рівняння Беллмана дозволяє створювати ефективні алгоритми керування, що не потребують значних обчислювальних ресурсів у реальному часі.

Постановка задачі. Дослідження розпочинається з базової нелінійної системи другого порядку (форм. 1). Далі розглядається її узагальнення зі сталим збуренням (форм. 2) та перехід до тривимірної моделі (форм. 3):

$$dx/dt = y^n, dy/dt = u, |u| \leq 1 \quad (1)$$

$$dx/dt = y^n + c, dy/dt = u, |u| \leq 1 \quad (2)$$

$$dy_1/dt = u, dy_2/dt = y_1, dy_3/dt = y_1^3, |u| \leq 1 \quad (3)$$

Методи дослідження. У роботі застосовано принцип максимуму Понтрягіна для визначення структури керування та метод характеристик для побудови розв'язків рівняння Беллмана. Для аналізу областей керованості використано теорему Філіппова.

Результати. Для системи (форм. 1) встановлено умови глобальної керованості для непарних n та обмеженість областей для парних випадків. Отримано явну формулу для оптимального часу переходу в нуль.

Для тривимірної системи (форм. 3) доведено, що релейне керування часто є лише локально оптимальним. Виявлено сингулярні режими ($u = 0$), інтегрування вздовж яких дозволяє досягти абсолютного мінімуму часу. Наведено порівняльний аналіз траєкторій, що підтверджує перевагу врахування особливих режимів при синтезі керування.

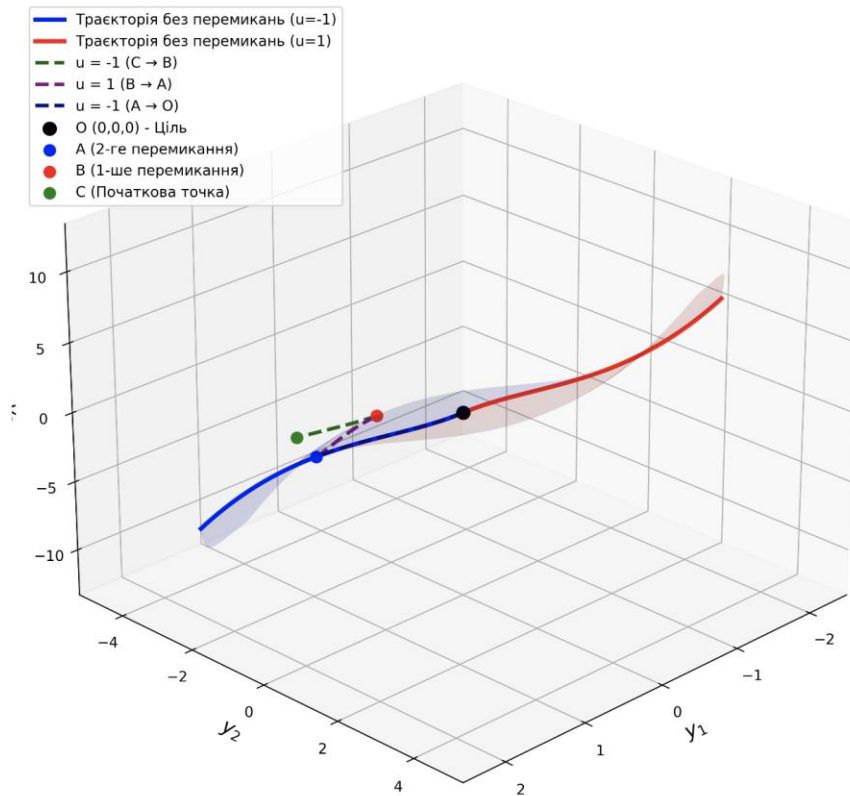


Рис. 1: Фазова траєкторія в просторі

Висновки. Розроблений аналітичний апарат забезпечує точний синтез оптимальних за швидкістю керувань. Результати можуть бути застосовані в системах прецизійного позиціонування та робототехніці.

Список використаних джерел:

1. Korobov V. I., Sklyar G. M. Time optimality and the power moment problem // Math. USSR Sb. 1989. Vol. 62, No. 1. P. 185–206.
2. Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu., Shugaryov S. E. Time-Optimal Control Problem for a Special Class of Control Systems: Optimal Controls and Approximation in the Sense of Time Optimality // J Optim Theory Appl. 2015. Vol. 165. P. 62–77.
3. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishechenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York/London: John Wiley & Sons, 1962. 360 p.

РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕРВАЛЬНОЇ МОДЕЛІ ЛЄОНТЬЄВА

Бодня М.В.

E-mail: voker1212@gmail.com

Національний технічний університет “Дніпровська Політехніка”

Науковий керівник: Ревіна Т.В.

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

Міжгалузевий баланс – це економіко-математична модель, яка характеризує виробничі взаємозв'язки між різними галузями в економіці країни. Вона показує зв'язок між випуском продукції в одній галузі та витратами продукції інших галузей, необхідними для цього випуску. Теоретичні основи цього методу, який згодом став відомий як метод «затрати-випуск», були застосовані у 1930-ті роки лауреатом Нобелівської премії Василем Леонтьєвим з використанням апарату лінійної алгебри [2, тема 2]. Отже рівняння балансу має вигляд

$$Y = (E - \tilde{A})X \quad (1)$$

де Y - вектор кінцевої продукції, E – одинична матриця розміру $n \times n$, $\tilde{A}$ – $n \times n$ матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, X – вектор валової продукції виробляючих/споживаючих галузей. У роботі [1] наведена демонстрація сайту для візуалізації процесів міжгалузевих зав'язків згідно з моделлю Леонтьєва.

Для проведення дослідження була сформована базова матриця технологічних коефіцієнтів та вектор кінцевої продукції для п'яти основних секторів економіки ($n=5$). Початкові дані наведені у таблиці нижче.

Таблиця 1. Початкові дані.

галузі	промисловість	Сільське господарство	будівництво	транспорт	Інші галузі	Кінцева продукція
пром-сть	0,04	0,141	0,136	0,017	0,021	15640
с/господарство	0,036	0,236	0,094	0,027	0,148	24480
будівництво	0,123	0,024	0,327	0,034	0,056	31560
транспорт	0,326	0,036	0,117	0,128	0,032	12330
Інші галузі	0,243	0,148	0,201	0,167	0,127	14671

Отже в таблиці 1 правий стовпчик – це значення вектору Y , значення в середині таблиці 1 – це коефіцієнти матриці $\tilde{A}$. Розв'язавши класичну систему рівнянь (1) отримуємо

Промисловість $X_1 = 34955.25$

С/господарство $X_2 = 53879.98$

Будівництво $X_3 = 62009.04$

Транспорт $X_4 = 39865.21$

Інші $X_5 = 57572.36$

В процесі функціонування економічних систем виникають різні види невизначеностей. Тому у модель (1) були введені штучні інтервальні похибки.

Система лінійних інтервальних рівнянь – це система рівнянь, коефіцієнти яких не є точно відомими, а лежать у деяких заданих інтервалах. У роботі [3] наведено методи розв’язку інтервальної системи рівнянь

$$Ax = b$$

де $A = [A_c - \Delta ; A_c + \Delta]$, $b = [b_c - \delta ; b_c + \delta]$. Питання існування розв’язків цієї системи еквівалентно дослідженню матриці системи на регулярність [3], що є NP – складною проблемою. Є різні підходи до поняття розв’язку цієї системи: алгебраїчний розв’язок (solutions in the usual, algebraic sense), об’єднаний розв’язок (united solutions), керований розв’язок (controllable (control) solutions), допустимий розв’язок (tolerance solutions) [3]. Є і інші методи знаходження розв’язку інтервальних рівнянь, найбільш відомий із них - це the Hansen-Blick-Rohn enclosure algorithm [3], який знаходить множину, яка включає в собі розв’язок.

Алгебраїчний розв’язок [3, Гл. 4.2] - це розв’язок

$$\{x: Ax = b \text{ для деяких } A \in [A_c - \Delta ; A_c + \Delta], \text{ деяких } b \in [b_c - \delta ; b_c + \delta]\}$$

Rohn отримав формулу

$$X_{alg} = \{x; |A_c x - b_c| \leq \Delta |x| + \delta\} \quad (2)$$

Допустимий розв’язок [3, Гл. 5.2] - це розв’язок

$$\{x: Ax \in b \text{ для всіх } A \in [A_c - \Delta ; A_c + \Delta], \text{ деяких } b \in [b_c - \delta ; b_c + \delta]\}$$

Rohn отримав формулу

$$X_{tol} = \{x; |A_c x - b_c| \leq -\Delta |x| + \delta\} \quad (3)$$

Керований розв’язок [3, Гл. 5.3] - це розв’язок

$$\{x: b \in Ax \text{ для деяких } A \in [A_c - \Delta ; A_c + \Delta], \text{ всіх } b \in [b_c - \delta ; b_c + \delta]\}$$

Rohn отримав формулу

$$X_{con} = \{x; |A_c x - b_c| \leq \Delta |x| - \delta\} \quad (4)$$

Отже в моделі міжгалузевого балансу маємо $(E - \tilde{A}) = A_c$, $Y = b_c$. Оберемо $\Delta = 0.01$, $\delta = 20$.

За допомогою розробленої програми були перевірені всі три інтервальні формули. В ході дослідження було написано код на мові програмування C#
Формула 2 (Алгебраїчний розв’язок)

Пром-сть $X_I = [30892.58 ; 40102.83]$

С/господарство	$X_2 = [48638.87 ; 60520.72]$
Будівництво	$X_3 = [56926.15 ; 68449.30]$
Транспорт	$X_4 = [34632.35 ; 46495.48]$
Інші	$X_5 = [50816.88 ; 66131.86]$

Формула 3 (Допустимий розв'язок)

Зовсім не дала ніякого результату, X – не існує

Формула 4 (Керований розв'язок)

Пром-сть	$X_1 = [30957.50 ; 40020.57]$
С/господарство	$X_2 = [48722.63 ; 60414.59]$
Будівництво	$X_3 = [57007.38 ; 68346.37]$
Транспорт	$X_4 = [34715.98 ; 46389.52]$
Інші	$X_5 = [50924.85 ; 65995.06]$

Тепер коли ми отримали результати розрахунків за допомогою написаної програми підбиймо підсумки

1) Достовірність розрахунків: Усі точні (базові) значення валового випуску, які були знайдені на першому етапі без урахування розкиду, входять у відповідні інтервали, отримані за формулами (2) та (4). Це підтверджує коректність написаного програмного коду та застосованої математичної логіки.

2) Чутливість системи: Відсутність допустимого розв'язку - формула (3) - свідчить про високу чутливість даної економічної системи до коливань технологічних коефіцієнтів.

Список використаних джерел:

1. ВЕЙЦБЛІТ О. Й., ВИГОДНЕР І. В. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА НА САЙТІ DJANGO //Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2025. – Т. 2. – №. 2 (93). – С. 76-83.
2. Скворчевський О. Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті: текст лекцій з курсу «Економіко-математичні методи та моделі» – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – 76 с.
3. Rohn J. A handbook of results on interval linear problems. Czech Academy of Sciences, Prague, 2005, 80 p.

СТРАТЕГІЯ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ДЕТЕКЦІЇ ОБ'ЄКТІВ НА СУПУТНИКОВИХ ЗОБРАЖЕННЯХ ЗАВДЯКИ ЗАСТОСУВАННЮ АУГМЕНТАЦІЙ

Телюк М.Б.

E-mail: Markiiian.Teliuk@lnu.edu.ua

Науковий керівник: Ящук Ю.О.

Сучасні системи дистанційного зондування Землі генерують масиви візуальної інформації, ручний аналіз яких є фізично неможливим, що зумовлює необхідність автоматизації процесів моніторингу за допомогою методів машинного навчання. Задача детекції та класифікації авіаційної техніки на аерокосмічних знімках формалізується як знаходження нелінійного параметризованого відображення f_θ (форм. 1) між вхідним простором ознак та простором цільових рішень:

$$f_\theta: X \rightarrow Y \quad (1)$$

де:

$X \subset R^{\{W \times H \times 3\}}$ — вхідний простір дискретних зображень, представлених у вигляді тензорів розмірності $W \times H$ з трьома кольоровими каналами;

$Y = R^{\{N \times (4+K)\}}$ — цільовий простір рішень, де N — кількість об'єктів, а вектор результату містить 4 координати обмежувальної рамки та K імовірностей приналежності до класів.

Для підвищення ефективності навчання та забезпечення інваріантності моделі до умов зйомки, вводиться глобальний оператор попередньої обробки $T_\phi: X \rightarrow X$, що визначає трансформацію простору ознак. У межах даного дослідження оператор T_ϕ представлений як ієрархічна композиція трьох функціональних підсистем:

$$T_\phi = C_\gamma \circ S_{\beta,\lambda} \circ A_\alpha, \quad (2)$$

де:

C_γ — оператор дискретної згортки [4], що застосовується для виділення локальних просторових ознак та фільтрації зображення за допомогою ядер K_γ ;

$S_{\beta,\lambda}$ — оператор інтеграції синтетичних даних [1], що реалізує змішування реальних та згенерованих ознак для розширення імовірнісної міри розподілу даних;

A_α — оператор стохастичної аугментації, який є основним об'єктом оптимізації у цій роботі.

Проблематика детекції об'єктів на супутниковому зображенні.

Головна вада класичних методів виявлення та класифікації цілей на аерокосмічних знімках полягає в ігноруванні специфічної просторової та геометричної природи об'єктів відносно підстилаючої поверхні. Застосування сучасних алгоритмів із базовими налаштуваннями просторових аугментацій даних призводить до суттєвого зниження точності розпізнавання [2]. Це

зумовлено тим, що стандартні методи перетворення генерують фізично неможливі для надірної зйомки викривлення, зокрема штучну модифікацію перспективи чи геометричний скіс. У результаті автоматизовані системи починають хибно фокусуватися на таких артефактах і деформованих контурах цілей, що спричиняє серйозні обчислювальні збої під час аналізу знімків із варіативним кутом орієнтації об'єктів [3].

Для вирішення цієї проблеми у даному дослідженні пропонується цільова стратегія підготовки даних, що базується на спеціалізованому конвеєрі просторових аугментацій. Підхід передбачає впровадження агресивного масштабування та повного випадкового обертання зображень, повністю відкидаючи застосування будь-яких штучних перспективних спотворень. Така стратегія гарантує збереження природної жорсткої геометрії об'єктів та автентичності відкинутих тіней, формуючи коректне просторове представлення ознак для подальшої класифікації.

Стратегія аугментації супутникових зображень.

Супутникові знімки характеризуються відсутністю фіксованих просторових орієнтирів та екстремальною нестабільністю масштабу. У межах одного набору даних об'єкти можуть займати значну площу або зводитися до групи з кількох пікселів. Для подолання цих викликів наша стратегія базується на досягненні максимальної просторової інваріантності шляхом постійного обертання та агресивного масштабування зображень під час навчання. Це позбавляє мережу прив'язки до конкретної орієнтації та змушує її вивчати справжні контури об'єктів незалежно від висоти чи кута зйомки. Водночас критично важливим було збереження фізичної достовірності даних, тому ми свідомо виключили штучні спотворення перспективи та скосу. Таке обмеження гарантує захист жорсткої геометрії шуканих цілей від неприродних деформацій.

Забезпечивши геометричну цілісність цілей, ми сфокусувалися на розширенні контексту за допомогою композитного методу Mosaic. Об'єднання кардинально різних фрагментів в єдиний кадр навчило алгоритм успішно ігнорувати складний фон. Логічним доповненням цієї оптимізації стало застосування цільових фотометричних перетворень у колірному просторі HSV. Аби зберегти справжню фізичну природу матеріалів та уникнути генерації нереалістичних кольорових артефактів, зміну базового відтінку було зведено до абсолютного мінімуму. Натомість діапазони насиченості та яскравості були суттєво розширені, що дозволило імітувати зміну погодних умов та освітленості. Такий підхід працює як кліматичний симулятор, змушуючи нейромережу розпізнавати об'єкти як на тлі яскраво-зеленої весняної трави, так і посеред

осіннього степу. Завдяки цьому алгоритм припиняє покладатися на нестабільні кольори, формуючи стійку незалежність від сезонних та добових змін на знімках.

Список використаних джерел:

1. Arjovsky M., Chintala S., Bottou L. Wasserstein GAN // arXiv preprint arXiv:1701.07875. 2017. С. 1–32. URL: <https://arxiv.org/abs/1701.07875> (дата звернення: 03.04.2026).
2. Ding J. та ін. Learning RoI Transformer for Oriented Object Detection in Aerial Images // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2019. С. 1. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.00155> (дата звернення: 02.04.2026).
3. He H. та ін. On the Robustness of Object Detection Models on Aerial Images // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2024. С. 1. URL: <https://doi.org/10.1109/tgrs.2024.3514741> (дата звернення: 03.04.2026).
4. Mallat S. Understanding Deep Convolutional Networks // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2016. Т. 374, № 2065. URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0203> (дата звернення: 03.04.2026).

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ SDN-МАРШРУТИЗАЦІЇ ЯК КООПЕРАТИВНОЇ DEC-POMDP ТА ІНЖЕНЕРНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ QMIX-АГЕНТІВ

Турчак Д.С.

E-mail: stillshedy@gmail.com

Науковий керівник: Руккас К.М., к.т.н., доцент

E-mail: rukkas@karazin.ua

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Динамічна маршрутизація в програмно-конфігурованих мережах (SDN) традиційно розглядається як задача одноагентного централізованого оптимізатора. У роботі показано, що її природне структурне представлення — децентралізована частково спостережувана марковська гра (Dec-POMDP), де кожен мережевий вузол є агентом із локальним спостереженням. Таке формулювання відкриває клас алгоритмів централізованого навчання з децентралізованим виконанням (CTDE), зокрема QMIX, і дозволяє усунути основне обмеження класичних методів: відсутність адаптивного покрокового управління чергами уздовж вже вибраного маршруту.

Dec-POMDP формалізація.

SDN-мережа представлена неорієнтованим графом $G = (V, E)$, де $|V| = N = 10$. Визначено кортеж $\langle S, \{A_i\}, \{O_i\}, T, r, \gamma \rangle$, де: S — глобальний стан (всі

черги + потоки); $A_i = \{\text{сусіди вузла } i\}$ — простір дій агента i (вибір наступного переходу для пакета); O_i — локальне спостереження $o_i = [q_i/Q_{max}, q_j/Q_{max}, l_{ij}/10, e_{dst}]$ для $j \in N(i)$, $\dim(o_i) = 1 + 2K + N$, де K — ступінь вузла, N — кількість вузлів; r — спільна нагорода для всіх агентів: $r = w_1 \cdot \underline{T} - w_2 \cdot \underline{L} - w_3 \cdot \underline{P}$, $w_1 = 1.0$, $w_2 = 10^{-3}$, $w_3 = 10^{-2}$; $\gamma = 0.99$ — коефіцієнт дисконтування. Ключова властивість: під час виконання агент i не отримує глобального стану S — лише o_i . Контролер SDN бачить S лише під час навчання через буфер досвіду.

Архітектура навчальної системи.

Реалізовано двопоточний алгоритм навчання. Потік виконання (E1–E5): кожен агент i отримує o_i ; з вірогідністю ε обирає випадкову дію, інакше — $\argmax_a Q_\theta(o_i, e_i, a)$ без звернення до контролера; середовище виконує крок і повертає (o'_i) ; перехід (*done*) зберігається у спільний буфер D розміром 100K; ε лінійно зменшується від 1.0 до 0.05 за 50K кроків. Потік навчання (T1–T6): кожні 4 кроки з буфера вибирається мінібатч $B = 64$; обчислюються $Q_i(o_i, a_i)$ і $Q'_i = \max_a Q_\theta(o'_i, e_i)$ через target-мережу; QMIX-мережа f_ϕ змішує $\{Q_i\}$ у глобальне Q_{tot} з монотонністю $\partial Q_{tot}/\partial Q_i \geq 0$; TD-ціль $y = r + \gamma \cdot (1 - done) \cdot Q'_{tot}$; мінімізується $L = E[(y - Q_{tot})^2]$ через Adam ($lr = 10^{-4}$, $grad_{clip} = 10$); target-мережа оновлюється м'яко: $\theta^- \leftarrow \tau \cdot \theta + (1 - \tau) \cdot \theta^-$, $\tau = 0.005$.

Parameter sharing та стабілізація навчання.

Усі N агентів використовують спільну Q-мережу $Q_\theta: R^{obs+N} \rightarrow R^{|A|}$ з додаванням one-hot ідентифікатора агента (вектор e_i довжиною N) до вхідного вектора. Це скорочує простір параметрів у N разів порівняно з N незалежними мережами і забезпечує узагальнення досвіду між вузлами. Архітектура Q-мережі: $Linear(obs + N, 128) \rightarrow ReLU \rightarrow Linear(128, 128) \rightarrow ReLU \rightarrow Linear(128, K)$. Критична інженерна знахідка: жорстке копіювання target-мережі (hard сору кожні C кроків) призводило до розходження TD-втрат понад 15K до 100-го епізоду в нестационарному MARL-середовищі. Заміна на soft target update з $\tau = 0.005$ (polyak averaging) усунула нестабільність і забезпечила монотонну збіжність за 2000 епізодів.

Структурний висновок про адитивну сепарабельність.

Порівняння VDN і QMIX на 400 епізодах (20 eval-запусків) дало: VDN 7.704 ± 0.369 , QMIX 7.685 ± 0.387 — статистично еквівалентні ($t = -0.16$, $p = 0.871$, $d = -0.05$). Mixing Network QMIX (гіпермережа, $\sim 34K$ параметрів проти $\sim 21K$ у VDN) не дає вимірного приросту. Це свідчить про адитивну сепарабельність SDN-задачі маршрутизації: дія вузла i впливає насамперед на локальну чергу q_i , а глобальна нагорода розкладається майже адитивно за агентами. Монотонна факторизація QMIX є достатньою але не необхідною

умовою — для задач із симетричними агентами та незалежними локальними чергами VDN є практично еквівалентним при значно меншій складності.

PettingZoo-сумісне симуляційне середовище.

Розроблено SDNParallelEnv — симуляційне середовище на базі PettingZoo Parallel API, сумісне зі стандартом Gymnasium. Середовище реалізує 10-вузловий граф Ердоша–Реньї $G(10,0.5)$ з чергами FIFO ($Q_{max} = 100$), трафіком Пуассона ($\lambda \sim U(6,10)$ пак./крок) та горизонтом 200 кроків. Нова пара (src, dst) генерується на кожен епізод. Ключові можливості: параметризована топологія (seed, n_nodes, edge_prob), стохастичний трафік, підтримка паралельного виконання N агентів на кожному кроці та сумісність з бібліотекою supersuit для векторизованих середовищ.

Висновки.

Dec-POMDP є природним і точним формальним представленням для SDN-маршрутизації з розподіленим управлінням. Двопоточна архітектура навчання (E1–E5 / T1–T6) з буфером досвіду як місток між децентралізованим виконанням і централізованим оновленням забезпечує стабільну збіжність. Soft target update ($\tau = 0.005$) є критичною умовою стабільності у нестационарних MARL-середовищах — жорстке копіювання призводило до розходження. Parameter sharing з one-hot ідентифікатором скорочує простір параметрів у N разів без втрати персоналізованих стратегій. Структурний аналіз підтверджує: SDN-задача є адитивно сепарабельною, тому VDN практично еквівалентний QMIX при вдвічі меншій складності мережі змішування.

Список використаних джерел:

1. Aguirre Sanchez L. P., Shen Y., Guo M. DQS: A QoS-driven routing optimization approach in SDN using deep reinforcement learning // Journal of Parallel and Distributed Computing. — 2024. — Vol. 188. — 104851.
2. Amato C. An introduction to centralized training for decentralized execution in cooperative multi-agent reinforcement learning // arXiv:2409.03052. — 2024.
3. Liu S. et al. Contrastive identity-aware learning for multi-agent value decomposition // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. — 2023.
4. Oroojlooy A., Hajinezhad D. A review of cooperative multi-agent deep reinforcement learning // Applied Intelligence. — 2023.
5. Pei X. et al. Enabling efficient routing for traffic engineering in SDN with Deep Reinforcement Learning // Computer Networks. — 2024. — Vol. 241. — 110220.
6. Towers M. et al. Gymnasium: A standard interface for reinforcement learning environments // NeurIPS Datasets and Benchmarks. — 2025.

ФОРМУЛЬНІ ПОДАННЯ КУСКОВО-КУБІЧНОГО ПОЛІНОМА ЕРМІТА І КУБІЧНОГО СПЛАЙНУ

Доля Петро Григорович

E-mail: pdolya@karazin.ua

Науковий керівник: Доля Петро Григорович

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Ключові слова: інтерполяція, кусковий поліном, кубічний сплайн, поліном Ерміта.

Кускові поліноми широко використовуються в наукових дослідженнях. Вони конструюються з сегментів звичайних поліномів і визначаються різними виразами на різних ділянках зміни аргумента. Функція $P_{\Delta}(x)$ називається кусковим поліномом, якщо вона може бути задана у вигляді

$$P_{\Delta}(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \leq x_1 \\ p_2(x), & x_1 < x \leq x_2 \\ \dots & \\ p_{n-1}(x), & x_{n-2} < x \leq x_{n-1} \\ p_n(x), & x > x_{n-1} \end{cases} \quad (1)$$

де $\Delta = \{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ позначає монотонно зростаючу $x_k < x_{k+1}$ множину точок дійсної осі, а $\{p_k(x)\}_{k=1}^n$ – послідовність дійсних поліномів $p_k(x) = \sum_{j=0}^{l_k} a_{kj}x^j$ ступенів l_k відповідно. Якщо виконується умова $p_k(x_k) = p_{k+1}(x_k)$ ($k = 1, \dots, n-1$), то $P_{\Delta}(x)$ буде неперервною кусково-поліноміальною функцією. В роботі [2] показано, що для $P_{\Delta}(x)$ існує єдине формульне представлення у вигляді

$$P_{\Delta}(x) = P(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(x)|x - x_k| \quad (2)$$

де $P(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_n(x))$ і $P_k(x)$ деякі (не кускові) поліноми. При чому, коли в точках x_k ($k = 1, \dots, n-1$) виконується гладке стикування поліноміальних сегментів $p_k(x)$ до порядку m_k ($0 \leq m_k < h_k = \{l_k, l_{k+1}\}$), тобто задовольняються рівності $p_k^{(q)}(x_k) = p_{k+1}^{(q)}(x_k)$ ($q = 0, 1, \dots, m_k$), то

$$P_k(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{q=m_k+1}^{h_k} \frac{p_{k+1}^{(q)}(x_k) - p_k^{(q)}(x_k)}{q!} (x - x_k)^{q-m_k-1} \right) (x - x_k)^{m_k} \quad (3)$$

Окремим випадком кускових поліномів є інтерполяційний кусково-кубічний поліном Ерміта (ІККПЕ), який будується наступним чином. Нехай в точках $\{x_i\}_{i=0}^n$ задані значення функції y_i та її похідних g_i . ІККПЕ є гладкою функцією $P_H(x) \in C^1$, яка на кожній ділянці $(x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є кубічним

поліномом, $P_H(x_i) = y_i$ і $\frac{dP_H(x_i)}{dx} = g_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Він відносно легко будується, оскільки рівняння кубічного сегменту $p_i(x)$, що проходить через дві точки (x_{i-1}, y_{i-1}) та (x_i, y_i) , і має в них задані похідні g_{i-1}, g_i можна записати у вигляді [1]:

$$p_i(x) = y_{i-1}(h_i + 2(x - x_{i-1})) \frac{(x - x_i)^2}{h_i^3} + g_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)^2}{h_i^2} + g_i \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} + y_i \frac{(h_i - 2(x - x_i))(x - x_{i-1})^2}{h_i^3}, \quad (4)$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$. Таким чином, при програмуванні $P_H(x)$ можна зберігати як Piecewise об'єкт у формі (1), де поліноміальні сегменти $p_i(x)$ обчислюються за формулами (4). Але це не завжди зручно. Підставляючи (4) в (3) і виконуючі спрощення, формула (2) набуває вигляду

$$P_H(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_n(x)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + k_i \cdot (x - x_i)) \cdot (x - x_i) \cdot |x - x_i| \quad (5)$$

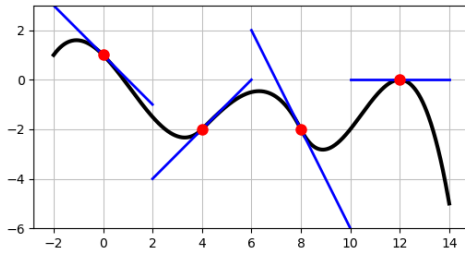
де $p_1(x), p_n(x)$ є рівняннями першої і останньої поліноміальних ланок, отримуваних з (4) при $i = 1$ та $i = n$, а коефіцієнти a_i і k_i обчислюються за формулами

$$a_i = 3 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} \right) - \left(\frac{g_{i+1} + 2g_i}{h_{i+1}} + \frac{g_{i-1} + 2g_i}{h_i} \right), \quad (6)$$

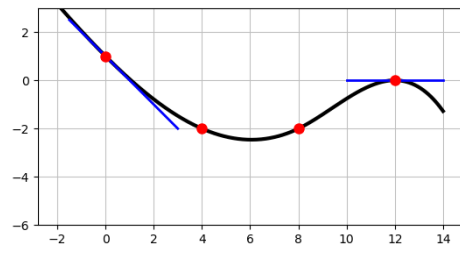
$$k_i = \frac{g_i + g_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}^3} + \frac{2(y_i - y_{i-1})}{h_i^3} - \frac{g_{i-1} + g_i}{h_i^2}.$$

Наприклад, кусковий поліном Ерміта $P_H(x)$, що проходить через 4 точки $(0,1), (4,-2), (8,-2), (12,0)$ і має в них похідні $P_H'(x_i) = g_i = \{-1, 1, -2, 0\}$, задається формулою (рис.1а)

$$P_H(x) = \frac{199}{2} - \frac{61}{2}x + \frac{89}{32}x^2 - \frac{3}{64}x^3 - \frac{1}{64}(5x + 6)(x - 4)|x - 4| + \frac{1}{16}(25 - x)(x - 8)|x - 8|.$$



а)



б)

Рис. 1: Інтерполяційні кусково-кубічні поліноми на вузлах $(x_i, y_i) = (0, 1), (4, -2), (8, -2), (12, 0)$; а) кусково-кубічний поліном Ерміта $P_H(x)$ з похідними $P'_H(x_i) = \{-1, 1, -2, 0\}$; б) кубічний сплайн $P_S(x)$ з граничними умовами $P'_S(x_0) = -1, P'_S(x_3) = 0$.

Якщо всі коефіцієнти a_i в формулі (5) виявляються нульовими, то результувна кусково-поліноміальна функція буде двічі неперервно диференційованою, оскільки кожний доданок $k_i(x - x_i)^2|x - x_i| = k_i|x - x_i|^3$ в (5) матиме таку властивість. З (6) випливає, що для цього одночасно повинні задовольнятися наступні співвідношення, тобто

$$3 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} \right) - \left(\frac{g_{i+1} + 2g_i}{h_{i+1}} + \frac{g_{i-1} + 2g_i}{h_i} \right) = 0$$

або

$$h_{i+1}g_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})g_i + h_i g_{i+1} = \frac{3h_{i+1}(y_i - y_{i-1})}{h_i} + \frac{3h_i(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}},$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$
(7)

Це можна трактувати як $n-1$ рівняння відносно $(n+1)$ невідомих $g_0, g_1, \dots, g_n$. Щоб замкнути систему слід задати дві додаткові умови, наприклад, два граничних значення g_0 і g_n . В результаті ми отримуємо класичну систему рівнянь, яка використовується при побудові кубічних сплайнів [1].

Таким чином, для конструювання єдиного формульного виразу $P_S(x)$ кубічного сплайну, що проходить через точки $(x_i, y_i)_{i=0}^n$, слід вчинити так. Спочатку записати і розв'язати відносно невідомих похідних g_i лінійну систему рівнянь (7) з двома доданими граничними умовами, наприклад, $g_0 = P'_S(x_0)$, $g_n = P'_S(x_n)$ (умова затиснення кінців). Потім за формулами (4) обчислити кубічні поліноми $p_1(x)$ і $p_n(x)$, і по (6) знайти коефіцієнти k_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Нарешті поліноми $p_1(x)$, $p_n(x)$ та коефіцієнти k_i використати в єдиному формульному виразі $P_S(x)$ кубічного сплайну

$$P_S(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_n(x)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i |x - x_i|^3, \quad (8)$$

Наприклад, кубічний сплайн, що проходить через точки (0,1), (4,-2), (8,-2), (12,0) і в крайніх вузлах має похідні $P'_S(x_0) = -1$, $P'_S(x_3) = 0$, задаватиметься рівнянням

$$P_S(x) = \frac{101}{10} - \frac{177}{40}x + \frac{229}{480}x^2 - \frac{9}{640}x^3 - \frac{1}{1920} |x - 4|^3 - \frac{17}{960} |x - 8|^3$$

Його графік наведено на рис. 1б.

Зауважимо, що формульний вираз (8) для кубічного сплайну в роботі [2] конструюється іншим способом, але дає такі самі значення коефіцієнтів.

Список використаних джерел:

1. I. D. Faux, M. J. Pratt. Computational Geometry for Design and Manufacture. Ellis Horwood, Chichester, England, 1981.
2. Доля П.Г. Про один спосіб представлення кускових поліномів в системах символічної математики. Вісник Харк. нац. ун-ту., – 2008. - № 833. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип.10. – С. 110-120.

Фундаментальна математика

Pure Mathematics

FUNDAMENTAL GROUPS AND COVERINGS OF GRAPHS: STRUCTURAL CONNECTIONS BETWEEN GRAPH THEORY AND ALGEBRAIC TOPOLOGY

Golubtsov A.A.

E-mail: holdun2006@gmail.com

Matej Bel University and Mechnykov National University

Graphs are usually studied as combinatorial objects consisting of vertices and edges. However, every graph can also be interpreted as a one-dimensional topological space, which allows one to describe its structure using algebraic invariants.

The aim of this paper is to present how graphs, viewed as one-dimensional CW-complexes, admit a natural interpretation in terms of algebraic topology. In particular, we describe how cycles give rise to elements of the fundamental group and how covering graphs reflect its subgroup structure. The classical result that the fundamental group of a connected finite graph is a free group of rank $|E| - |V| + 1$ serves as the central structural principle, illustrated through explicit examples.

1. Graphs as topological spaces

A graph may be regarded as a topological object by replacing each edge with a geometric interval and gluing endpoints according to incidence. This leads naturally to the language of CW-complexes.

Definition 1. Let $G = (V, E)$ be an undirected graph. Its geometric realization $|G|$ is the topological space obtained by assigning to each edge $e \in E$ a copy of the interval $[0, 1]$, and identifying the endpoints of this interval with the vertices incident to e .

A graph can be regarded as a one-dimensional CW-complex consisting of 0-cells (vertices) and 1-cells (edges).

2. The fundamental group of a graph and free groups

Theorem 1. Let G be a connected finite graph. Then

$$\pi_1(G, x_0) \cong F_r, \quad r = |E| - |V| + 1,$$

where r is the cycle rank of the graph. It counts the number of independent cycles.

2.1. Homological viewpoint on cycle structure.

In addition to the fundamental group, graph structure can be described using homology. For a connected graph G , the first homology group is given by

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \cong F_r, \quad r = |E| - |V| + 1.$$

Thus, $H_1(G, \mathbb{Z})$ is a free abelian group whose rank coincides with the number of independent cycles of the graph (the cycle rank). In contrast to the fundamental group $\pi_1(G) \cong F_r$, which is non-abelian for $r \geq 2$, the homology group captures the same cycle structure in a linearized (commutative) form.

More precisely, $H_1(G, \mathbb{Z})$ can be obtained from $\pi_1(G)$ by abelianization, identifying elements up to commutation of generators, that is, passing to the abelianization of the group. This shows that homology retains only the abelian part of the cycle structure, disregarding the order of traversal of cycles.

This correspondence between graph structure and algebraic invariants can also be interpreted geometrically. The rank $r = |E| - |V| + 1$ coincides with the number of edges outside a spanning tree, and each such edge creates an independent cycle. From this perspective, the fundamental group reflects how these additional edges are attached to a tree-like structure, while coverings may be viewed as ways of separating these attachments into a simpler, acyclic configuration.

3. A first basic family of examples

Example 1. (A tree) If T is a tree, then $\pi_1(T, x_0) \cong F_0$, since $r = |E| - |V| + 1 = 0$, as for every finite tree one has $|E| = |V| - 1$.

Example 2. (The cycle graph and the circle) Let C_n be the cycle graph with n vertices and n edges. Its geometric realization is homeomorphic to the unit circle S^1 .

4. The figure-eight graph and the free group F_2

Let G be the figure-eight graph, obtained by joining two cycles at a single point x_0 . Topologically, this is the wedge sum $S^1 \vee S^1$.

As a CW-complex, it may be written as $e^0 \cup e_a^1 \cup e_b^1$, that is, one 0-cell and two 1-cells attached at the same point.

Choose two loops: a - go once around the left circle; b - go once around the right circle.

Then

$$\pi_1(G, x_0) \cong F_2 = \langle a, b \rangle.$$

This example illustrates how different compositions of cycles correspond to distinct elements of the fundamental group. Covering graphs may be viewed as “unfoldings” of these cycles, where nontrivial loops in the base graph become non closed paths in the covering space. In particular, the universal covering removes all cycles, resulting in a tree.

5. Generalized and universal coverings of connected graphs and subgroups of the fundamental group

Definition 4. A continuous surjective map $p : Y \rightarrow X$ is called a covering map if for every point $x \in X$ there exists an open neighborhood U such that the preimage $p^{-1}(U)$ can be written as a disjoint union of open sets U_α , and the restriction of p to each U_α is a homeomorphism onto U . Y is called a covering of X .

Definition 5. If G and Γ are graphs and $p : \Gamma \rightarrow G$ is a covering map between their geometric realizations is a covering map, then Γ is called a covering graph of G .

The circle provides a fundamental example of a space with nontrivial coverings. Its universal covering is given by the map

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad p(t) = e^{2\pi i t}$$

This map can be interpreted as “unwrapping” the circle into a line. Each loop on the circle lifts to a path on $\mathbb{R}$, and it is closed if and only if it corresponds to an integer number of turns around the circle.

In particular, the fundamental group of the circle is isomorphic to $\mathbb{Z}$, where each integer corresponds to the winding number of a loop.

Definition 6. A covering

$$p : Y \rightarrow X$$

is called a universal covering if Y is connected and simply connected.

Theorem 2. *The universal covering of any connected graph is a tree.*

A fundamental result states that connected coverings correspond to subgroups of $\pi_1(X, x_0)$. This result applies directly to graphs, which satisfy the required topological conditions.

In the graph setting, the theorem means that each connected covering graph determines a subgroup of $\pi_1(G, x_0)$ and, conversely, each subgroup determines a connected covering graph.

A subgroup consists of those loop classes whose lifts, starting at a chosen point in the covering space, are closed loops.

6. Interpretation and perspective

The topological interpretation of graphs reveals a structural principle: the global cycle structure of a graph is encoded algebraically. The fundamental group captures this structure in a non-commutative form, while covering graphs provide geometric realizations of its subgroup structure.

A complementary viewpoint is given by homology. The first homology group $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ records the same cycle structure in a linearized (commutative) form, detecting the number of independent cycles while ignoring their non-commutative interactions.

Thus, a graph may be simultaneously understood as a combinatorial object, a topological space, and an algebraic structure. This unified perspective clarifies the role of cycles as global features and provides a natural framework for studying graph

structures under additional constraints, such as labelings, embeddings, or symmetries.

References:

1. Hartsfield N., Ringel G. *Pearls in Graph Theory*. Academic Press, 1990. 256 p.
2. Hatcher A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. 550 p.
3. Kozlov D. *Combinatorial Algebraic Topology*. Springer, 2008. 390 p.
4. May J. P. *A Concise Course in Algebraic Topology*. University of Chicago Press, 1999. 253 p.
5. Munkres J. *Topology*. Prentice Hall, 2000. 537 p.
6. Serre J.-P. *Trees*. Springer, 1980. 142 p.

ON NON DIFFERENTIABLE FUNCTIONS AND ONE-SIDED DERIVATIVES

Violetta Oriabynska

E-mail: violettaoryabinska@gmail.com

Scientific Advisor: Dmytro Seliutin

V. N. Karazin Kharkiv National University

In this work, we are going to discuss case of non-differentiability of functions and the meaning of the derivative, along with its applications. Here we studied some properties and analyzed some challenging aspects and conditions that lead to non-differentiability. Let us remind some basic definitions.

Definition 1. The number A is called the right-hand limit of the function $f(x)$ at the point a if for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for all x in the domain of f satisfying $a < x < a + \delta$, the following inequality holds:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Notation: $f(x) = A$

Definition 2. The number A is called the left-hand limit of the function $f(x)$ at the point a if for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for all x in the domain of f satisfying $a - \delta < x < a$, the following inequality holds:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Notation: $f(x) = A$

The main result is the following theorem:

Theorem 1. If the limit of a function $f(x)$ as x approaches a from the right (or from the left) exists, then it is unique.

Also we studied questions deals with non-differentiable functions, for example, $f(x) = |x|$.

Definition 3. The right-hand derivative of f at a point $a \in I$, denoted by $f'_+(a)$ is defined as the limit:

$$f'_+(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

if this limit exists and is finite.

Definition 4. The left-hand derivative of f at a point $a \in I$, denoted by $f'_-(a)$ is defined as the limit:

$$f'_-(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

if this limit exists and is finite.

Having Theorem 1 we can formulate the next theorem:

Theorem 2. If a function $f(x)$ has a right-hand (or left-hand) derivative at a point a , then this derivative is unique.

References:

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, ч. I, II. –К.; Либідь, 1994.

ON WEYL DISKS VIA ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Edgar Martinez Macedonio

E-mail: 1609953g@umich.mx

Academic advisor: Dr. Abdon Eddy Choque Rivero

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

In this work we consider a sequence of Hermitian matrices $\{S_j\}_{j=0}^{2n} \subset \mathbb{C}^{q \times q}$ generated by a positive measure $\sigma(\lambda)$ supported on $[0, \infty)$. We study the associated families of matrix orthogonal polynomials $\{(P_{l,j}(z))_{j=0}^n, (Q_{l,j}(z))_{j=0}^n, (P_{2,j}(z))_{j=0}^n, (Q_{2,j}(z))_{j=0}^n\}$ corresponding to this measure, that is, in the framework of the Stieltjes moment problem, together with the three-term recurrence relations they satisfy

$$\begin{aligned} z P_{k,0}(z) - A_{k,0} P_{k,0}(z) - P_{k,1}(z) &= 0_q, \\ z Q_{k,0}(z) - A_{k,0} Q_{k,0}(z) - Q_{k,1}(z) + s_0 &= 0_q, \end{aligned} \tag{1}$$

for $k \in \{1, 2\}$. For $j \geq 1$, we have

$$\begin{aligned} z P_{k,j}(z) - B_{k,j-1}^* P_{k,j-1}(z) - A_{k,j} P_{k,j}(z) - P_{k,j+1}(z) &= 0_q, \\ z Q_{k,j}(z) - B_{k,j-1}^* Q_{k,j-1}(z) - A_{k,j} Q_{k,j}(z) - P_{k,j+1}(z) &= 0_q. \end{aligned} \tag{2}$$

Using these polynomials, we consider the resolvent matrix associated with the Stieltjes moment problem, as introduced in [2]. Based on this construction, we derive a representation of the resolvent matrix for the corresponding Hamburger moment problem.

This representation is used to study Weyl disks via orthogonal polynomials with respect to the measure σ . With this approach, we obtain two formulas for the centers and radii of the Weyl disks. These expressions provide a direct description of their geometric structure and help to understand their behavior in the corresponding spectral theory.

References:

1. T. Aktosun, V. G. Papanicolaou. Inverse problem with transmission eigenvalues for the discrete Schrodinger equation. *Journal of Mathematical Physics* 56 (2015), 082101.
2. A. E. Choque Rivero. On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials. *Linear Algebra and its Applications* 474 (2015), 44–109.
3. B. Fritzsche, B. Kirstein, S. Kley, C. Madler. The Weyl matrix balls corresponding to the matricial truncated Hamburger moment problem. *Linear Algebra and its Applications* 651 (2022), 230–311.

THE NEVANLINNA MATRIX OF THE TRUNCATED HAUSDORFF MATRIX MOMENT PROBLEM VIA ORTHOGONAL MATRIX POLYNOMIALS ON $[A,B]$ FOR THE CASE OF AN EVEN NUMBER OF MOMENTS

Baruch Emmanuel Medina Hernandez

E-Mail: 1130390c@umich.mx

Academic advisor: Abdon Eddy Choque Rivero

Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo / UNAM

The scalar moment problem was first introduced by T. J. Stieltjes in his work "Recherches sur les fractions continues" (1895). He formulated it as follows: given the moments of order k ($k=0,1,2,\dots$), find a positive mass distribution on the half-line $[0,+\infty)$.

The study of matrix and operator moment problems was initiated by M. G. Krein in his seminal work on Hermitian operators (1949).

This work is devoted to the truncated Hausdorff matrix moment (THMM) problem on a compact interval $[a,b]$. In contrast to the Stieltjes and Hamburger moment problems, the THMM problem is formulated on a finite interval. Our approach is based

on Potapov's method, which reformulates moment problems in terms of matrix inequalities and introduces auxiliary matrices satisfying a J-inner property.

We construct Hankel matrices from the prescribed moments and analyze solvability conditions via positive semidefiniteness. In the non-degenerate case, we derive the associated Nevanlinna (resolvent) matrix, which characterizes the solution set.

The main contribution of this work is a representation of the Nevanlinna matrix in terms of orthogonal matrix polynomials and their associated polynomials of the second kind evaluated at the endpoint b . Furthermore, we establish new identities and provide an explicit relationship between the Nevanlinna matrices at the endpoints a and b .

References:

1. T. J. Stieltjes. Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulouse 1894 Vol. 8. P. 1-122.
2. M. G. Krein. Fundamental aspects of the representation theory of Hermitian operators with deficiency index (m, m) , Transl. Ser. II Am. Math. Soc. 1949 Vol. 97. P. 75--143.
3. A. E. Choque Rivero, Yu. M. Dyukarev, B. Fritzsche, B. Kirstein. A truncated matricial moment problem on a finite interval, In Interpolation, Schur Functions and Moment Problems, Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser, Basel. 2006 Vol. 165. P.121--173.
4. From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem, Bol. Soc. Mat. Mex. 2015 Vol. 21, No 2. P 233--259.

ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБРИ КЕЛІ

Гальчук С.А.

E-mail: solomiyagalcuk@gmail.com

Крайчук О.В.

E-mail: a.kraychuk@gmail.com

Науковий керівник: Крайчук О.В.

Рівненський державний гуманітарний університет

Тіло кватерніонів є розширенням поля комплексних чисел $\mathbb{C}$. Довільний кватерніон $q = a + ib + cj + dk$ можна подати у вигляді $q = (a + ib) + (c + di)j = z_1 + z_2j$, де $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + di$, оскільки $k = ij$. Кватерніони виду $a + ib = a + ib + 0j + 0k$, як неважко перевірити, утворюють поле, ізоморфне полю $\mathbb{C}$ комплексних чисел, тому елементи z_1, z_2

Таким чином, кватерніони можна означити як формальні вирази виду: $z_1 + z_2j$, де z_1, z_2 – комплексні числа, а j – деякий символ такий, що $j^2 = -1$, додавання і множення яких здійснюється за правилами:

$$(z_1 + z_2j) + (w_1 + w_2j) = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2)j,$$

$$(z_1 + w_1j)(z_2 + w_2j) = (z_1w_1 - \underline{w_2z_2}) + (w_2z_1 + z_2\underline{w_1})j.$$

Побудуємо, виходячи з тіла кватерніонів, ще одну алгебру A з діленням скінченного рангу над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, т.з. алгебру Келі (в честь англійського математика А.Келі). Розглянемо множину A всіх формальних виразів виду $q_1 + q_2e$, де q_1, q_2 – кватерніони, e – символ, такий, що $e^2 = -1$. Додавання і множення цих виразів задамо формулами:

$$(q_1 + q_2e) + (r_1 + r_2e) = (q_1 + r_1) + (q_2 + r_2)e,$$

$$(q_1 + q_2e)(r_1 + r_2e) = (q_1r_1 - \underline{r_2q_2}) + (r_2q_1 + q_2\underline{r_1})e.$$

Якщо $q_1 = a + bi + cj + dk$, $q_2 = A + Bi + Cj + Dk$, то

$$q_1 + q_1e = a + bi + cj + dk + Ae + B(ie) + C(je) + D(ke).$$

Кожний елемент $q_1 + q_1e$ взаємно однозначно визначається своїми дійсними коефіцієнтами a, b, c, d, A, B, C, D , тому алгебра Келі A має ранг 8 над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел із базисом $1, i, j, k, e = E, ie = I, je = J, ke = K$, а її елементи однозначно подаються у вигляді

$$** = a + bi + cj + dk + A E + B I + C J + D K$$

і називається октавами. Якщо у формулі множення $q_2 = r_2 = 0$, то дістанемо: $(q_1 + 0e) \cdot (r_1 + 0e) = q_1r_1 + 0e$. Звідси випливає, що таблиця множення базисних елементів $1, i, j, k$ в алгебрі A така сама, як і в алгебрі кватерніонів.

Правила множення інших базисних елементів, які можна аналогічним чином отримати із загальної формули множення, легко запам'ятати, якщо виписати наступні сім трійок: $i, j, k; J, J, -k; J, -j, K; -I, J, K; I, E, J; j, E, J; k, E, K$. Виявляється, що в кожній трійці базисні елементи перемножаються точно так само, як і в трійці I, j, k , тобто якщо „ - одна з даних трійок, то $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1, \alpha\beta = -\beta\alpha = \gamma, \beta\gamma = -\gamma\beta = \alpha, \gamma\alpha = -\alpha\gamma = \beta$. Алгебра Келі вже не є ні комутативною, ні асоціативною, бо $(ij)E = kE = K, i(jE) = iJ = -K$. Перевіркою можна переконатися, що для $**$ справджується лівий і правий закони дистрибутивності множення відносно додавання.

Якщо $\xi = q_1 + q_2e$ - довільна октава, то октава $\underline{\xi} = q_1 - q_2e$ називається спряженою до неї. Із правила множення октав і властивостей спряжених кватерніонів легко отримуються наступні властивості спряжених октав:

$$\underline{\xi + \xi} = \underline{\xi} + \underline{\xi}, \underline{\xi \cdot \xi} = \underline{\xi} \cdot \underline{\xi}, \xi \cdot \underline{\xi} = \underline{\xi} \cdot \xi = q_1q_1 + q_2q_2 = N(q_1) + N(q_2),$$

де $N(q_1)$ і $N(q_2)$ - норми кватерніонів q_1 і q_2 . Невід'ємне дійсне число $N(\xi) = \xi \cdot \underline{\xi} = N(q_1) + N(q_1)$, називається нормою октави $\xi = q_1 + q_2e$.

Якщо октава ξ відмінка від нуля, то $\xi \left(\frac{1}{N(\xi)} \cdot \xi \right) = \left(\frac{1}{N(\xi)} \cdot \xi \right) = 1$, тому октава $\frac{1}{N(\xi)} \cdot \xi$ є оберненим елементом, до октави ξ . Звідси, зокрема, випливає, що для довільних октав $\xi \neq 0$, η знайдуться такі октави x і y , що $\xi \cdot x = \eta$, $y \cdot \xi = \eta$, тобто алгебра Келі є алгеброю із діленням. Справді, за x, y можна взяти октави $x = \frac{1}{N(\xi)} \xi \eta$, $y = \frac{1}{N(\xi)} \eta \xi$.

Як уже відзначалося вище, алгебра Келі неасоціативна. Але все ж для операції множення октав справджується властивість, яку можна вважати деяким послабленням закону асоціативності. Так, для довільних октав справджуються рівності: $(\xi\xi)\eta = \xi(\xi\eta)$, $(\eta\xi)\xi = \eta(\xi\xi)$. Справді, якщо $\xi = q_1 + q_2 e$, $\eta = r_1 + r_2 e$, то

$$\begin{aligned} (\xi\xi)\eta &= \left[(q_1^2 - q_2 q_2) + (q_2 q_1 + q_2 q_1) e \right] (r_1 + r_2 e) =, \\ &= \left[(q_1^2 - q_2 q_2) r_1 - r_2 (q_2 q_1 + q_2 q_1) \right] + \left[r_2 (q_1^2 - q_2 q_2) + (q_2 q_1 + q_2 q_1) r_2 \right] e = \\ &= \left[q_1^2 r_1 - r_2 q_2 (q_1 + q_1) - N(q_2) r_1 \right] + \left[r_2 q_1^2 + q_2 (q_1 + q_1) r_2 - r_2 N(q_2) \right] e \\ \xi(\xi\eta) &= (q_1 + q_1 e) \cdot \left[(q_1 r_1 - r_2 q_2) + (r_2 q_1 + q_2 r_2) e \right] = \\ &= \left[q_1 (q_1 r_1 - r_2 q_2) - r_2 q_1 + q_2 r_1 q_2 \right] + \left[(r_2 q_1 + q_2 r_2) q_1 + q_2 q_1 r_1 - r_2 q_2 \right] e = \\ &= \left[q_1^2 r_1 - (q_1 + q_1) r_2 q_2 - r_1 N(q_2) \right] + \left[r_1 q_1^2 + q_2 r_2 (q_1 + q_2) - N(q_2) r_2 \right] e. \end{aligned}$$

Оскільки $q_1 + q_2$ і $N(q_2)$ - дійсні числа, тому переставні при множенні з довільними кварніонами, то звідси отримуємо: $(\xi\xi)\eta = \xi(\xi\eta)$. Рівність $(\eta\xi)\xi = \eta(\xi\xi)$ доводиться аналогічно. Алгебра, множення в якій задовольняє вказаному вище послабленому закону асоціативності, називається альтернативною. Отже, алгебра Келі є альтернативною алгеброю. Виявляється, що довільна альтернативна алгебра з діленням скінченного рангу над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел ізоморфна або полю $\mathbb{R}$, або полю $\mathbb{C}$, або тілу кватерніонів K , або ж алгебрі Келі A . Це твердження називається узагальненою теоремою Фробеніуса.

Список використаних джерел:

1. Марач В.С., Крайчук О.В. Вибрані лекції з алгебри. Групи. Кільця. Поля. Ч.2. Рівне: Рівненський державний педінститут, 1996, 168с.

ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕННИХ ПОЛІВ

Нізелюк Н.Л.

E-mail: nizeluknadia@gmail.com

Крайчук О.В.

У процесі математичних досліджень здебільшого використовуються нескінченні числові поля раціональних $\mathbb{Q}$, дійсних $\mathbb{R}$ і комплексних $\mathbb{C}$ чисел. Проте існують поля, що мають скінченне число елементів, наприклад, поле Z_p класів лишків за простим модулем p , що складається із p елементів. Тому виникає необхідність вивчення властивостей скінченних полів.

Довільне скінченне поле, яке складається з q елементів, будемо позначати символом F_q . Порядком скінченного поля F_q будемо називати число q його елементів. Встановимо спочатку декілька допоміжних тверджень.

Лема 1. Довільне скінченне поле F_q має характеристику p , де p – просте натуральне число, і містить підполе, ізоморфне полю Z_p класів лишків за модулем p .

Доведення. Справді, характеристика довільного поля дорівнює або нулю, або деякому простому натуральному числу p , причому поле характеристики 0 містить підполе, ізоморфне полю $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, а поле характеристики p містить підполе, ізоморфне полю Z_p класів лишків за модулем p . Враховуючи, що характеристику 0 можуть мати лише нескінченні поля, дістанемо, що $\text{char } F_q = p$ для деякого простого натурального числа p . Тому поле F_q містить підполе, ізоморфне полю Z_p , причому це підполе є мінімальним підполем поля F_q . Ототожнюючи це мінімальне підполе з полем Z_p , можна вважати, що $Z_p = F_q$. Лема доведена.

Лема 2. Порядок будь-якого скінченного поля F_q дорівнює p^n , де p – просте, n – натуральне числа.

Доведення. Згідно з лемою 1, поле F_q є розширенням, причому скінченим, свого мінімального підполя F_p , що складається з p елементів, де p – просте натуральне число: $[F_q : F_p] = n$ для деякого натурального n . Якщо $w_1, \dots, w_n$ – базис векторного простору F_q над полем F_p , то кожний елемент з F_q однозначно подається у вигляді лінійної комбінації $a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$, де $a_1, \dots, a_n \in F_p$. Оскільки поле F_p складається з p елементів, то кількість різних лінійних вказаного виду, а це і будуть усі елементи поля F_q , дорівнює p^n .

Лема 3. Якщо P – поле характеристики p , то для довільних $a, b \in P$ і довільного натурального k $(a \pm b)^{p^k} = a^{p^k} \pm b^{p^k}$.

Доведення. Доведемо дане твердження методом математичної індукції за числом k . При $k = 1$, застосовуючи формулу бінома Ньютона, яка справедлива в будь-якому полі, дістанемо:

$$(a + b)^p = a^p + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^{p-i} b^i + b^p.$$

Біноміальний коефіцієнт $C_p^i = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{1\cdot 2\cdot \dots\cdot i}$ при $i = 1, \dots, p-1$ ділиться на p , бо p взаємно просте з кожним із чисел $1, 2, \dots, i$, стоять в знаменнику, тому в полі P характеристики p справджуються рівності: $C_p^i a^{p-i} b^i = 0$ для всіх $i = 1, \dots, p-1$. Отже, $(a + b)^p = a^p + b^p$. Припускаючи справедливість твердження леми для показника p^{k-1} , отримаємо:

$$(a + b)^{p^k} = \left((a + b)^{p^{k-1}} \right)^p = \left(a^{p^{k-1}} + b^{p^{k-1}} \right)^p = a^{p^k} + b^{p^k}.$$

Згідно з методом математичної індукції, твердження леми виконується для всіх натуральних k . Крім того, якщо $p = 2$, то $b + b = 2b = 0$ і $b = -b$. Аналогічно, $\forall k \in \mathbb{N}$ у цьому випадку $b^{2^k} + b^{2^k} = 2b^{2^k} = 0$ і $b^{2^k} = -b^{2^k}$. Якщо ж $p > 2$, то p^k – непарне число, тому $(-b)^{p^k} = (-1)^{p^k} b^{p^k}$. Отже,

$$(a - b)^{p^k} = a^{p^k} + (-b)^{p^k} = a^{p^k} - b^{p^k}.$$

Наступні теореми описують основні властивості скінченних полів.

Теорема 1. [1, с.95]. Порядок будь-якого скінченного поля дорівнює p^n , де p – просте, n – натуральне числа. Для будь-якого числа $q = p^n$, де p – просте, n – натуральне, існує єдине (з точністю до ізоморфізму) поле порядку q .

Теорема 2. [1, с.96]. Якщо F – довільне підполе скінченного поля F_{p^n} , то $F = F_{p^d}$, де $n : d$. Навпаки, кожному натуральному дільнику d числа n відповідає рівно одне підполе F_{p^d} поля F_{p^n} .

Теорема 3. [1, с.97]. Мультиплікативна група всіх ненульових елементів скінченного поля F_p , де $q = p^n$ для деякого простого натурального числа p є циклічною групою порядку $q - 1$.

Список використаних джерел:

1. Марач В.С., Крайчук О.В. Вибрані лекції з алгебри. Групи. Кільця. Поля. Ч.2. Рівне: Рівненський державний педінститут, 1996, 168с.

ГЕОМЕТРІЯ ПОВЕРХОНЬ, АСОЦІЙОВАНИХ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Стегура М.В.

E-mail: michaelstg737@gmail.com

Науковий керівник: Ямпольський О.Л.

Звичайні диференціальні рівняння (ЗДР) часто складно розв'язувати класичними аналітичними методами. У цій роботі розглядається альтернативний, геометричний підхід, який дозволяє співставляти диференціальному рівнянню першого порядку відповідний рімановий многовид та досліджувати розв'язки цього рівняння через геометричні властивості побудованого многовиду.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння першого порядку у вигляді $\frac{du}{dx} = \phi(x, u)$. Для його геометричного дослідження зручно ввести асоційоване векторне поле $A = \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$. Асоційованою метрикою називається така ріманова метрика g , в якій векторне поле A є одиничним та ортогональним до поля ∂_u . У вигляді тензорного добутку вона задається наступним чином (форм. 1):

$$g = (1 + \phi^2)dx \otimes dx - \phi dx \otimes du - \phi du \otimes dx + du \otimes du \quad (1)$$

Після обчислення символів Крістофеля для даної метрики було доведено ключову властивість: крива $u = f(x)$ є геодезичною лінією в метриці g тоді й лише тоді, коли функція $f(x)$ є розв'язком вихідного диференціального рівняння. Цей факт підтверджує внутрішній зв'язок між динамікою системи та геометрією асоційованого простору.

За допомогою методу рухомого репера (методу Картана) було здійснено перехід до ортонормованого базису та виведено формулу для Гауссової кривини K асоційованої поверхні (форм. 2):

$$K = -(\phi_{xu} + \phi\phi_{uu} + \phi_u^2) \quad (2)$$

Далі буде показано, що геометрична умова нульової кривини поверхні ($K = 0$) є еквівалентною наявності першого інтеграла, що дозволяє аналітично розв'язати рівняння у квадратурах. Оскільки для довільного рівняння поверхня не обов'язково є плоскою, було також досліджено деформовану метрику g_ϵ , в якій вертикальний напрямок масштабується на множник $e^{2\epsilon}$. Встановлено, що для інтегровності рівняння достатньо існування такої деформації, яка зводить кривину деформованої поверхні до сталої величини. Це зводить задачу до розв'язання лінійного рівняння Якобі та побудови інтегрувального множника.

Таким чином, застосування апарату диференціальної геометрії є ефективним інструментом, що відкриває нові шляхи для класифікації та розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

Список використаних джерел:

1. Pan-Collantes A. J., Álvarez-García J. A. Surfaces associated with first-order ODEs. arXiv:2312.04489v4 [math.CA], 2025. 13 с.
2. Ямпольський О. Диференціальна геометрія: базовий курс. Навчальний посібник. Харків: Вид-во ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2024. 337 с.

ГРУПИ ПОВОРОТІВ ТА СИМЕТРІЙ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ НА ПЛОЩИНІ

Козаченко М.П.

E-mail: mariakozacenko2005@gmail.com

Крайчук О.В.

E-mail: a.kraychuk@gmail.com

Науковий керівник: Крайчук О.В.

Рівненський державний гуманітарний університет

Означення.[1,с.95] Симетрією геометричної фігури F називається будь-який рух φ площини або простору, що переводить фігуру F в себе: $\varphi(F) = F$.

Множина всіх симетрій плоскої фігури F утворює групу відносно операції композиції рухів, яку називають групою симетрій фігури F . Справді, якщо φ і ψ – довільні симетрії фігури F , то $(\varphi \circ \psi)(F) = \varphi(\psi(F)) = \varphi(F) = F$, і $\varphi \circ \psi$ є симетрією F . Тотожний рух ε , очевидно, є симетрією будь якої фігури. Далі, $\varphi^{-1}(F) = \varphi^{-1}(\varphi(F)) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(F) = \varepsilon(F) = F$, то і φ^{-1} є симетрією.

Композиція двох рухів 1-го роду є рухом 1-го роду і такими ж є тотожний рух ε і рух, обернений до руху 1-го роду, то множина всіх симетрій фігури F , що є рухами 1-го роду теж утворює групу. Оскільки група разом з кожним своїм елементом φ містить всі елементи $\varphi^n (n \in \mathbb{Z})$, то група симетрій обмеженої фігурами не може містити паралельних перенесень і гвинтових рухів з ненульовими векторами. Із властивостей обмежених фігур випливає, що з рухів 1-го роду симетріями обмеженої фігури можуть бути лише повороти. Тому групу симетрій 1-го роду обмеженої фігури F будемо називати групою поворотів фігури F . Ковзна симетрія з ненульовим вектором теж не може бути симетрією обмеженої фігури. Отже, з рухів площини симетріями обмеженої фігури можуть бути лише повороти і осьові симетрії.

Оскільки кожний правильний n -кутник є обмеженою фігурою, то всі рухи 1-го роду площини, що є його симетріями, можуть бути лише поворотами. Неважко зрозуміти, що правильний n -кутник суміщається сам із собою лише

при таких поворотах площини, центр яких збігається з центром n – кутника, причому кут повороту повинен бути кратний $\frac{2\pi}{n}$.

Отже, група поворотів правильного n – кутника на площині складається з поворотів на кути $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi(n-1)}{n}$ навколо центра n – кутника, оскільки повороти на кути $\frac{2\pi m}{n}$ і $\frac{2\pi k}{n}$ при $m = qn + r$ є одним і тим самим рухом площини. Ця група ізоморфна циклічній групі C_n n –го порядку і породжується поворотом на кут $\frac{2\pi}{n}$ (або $\frac{2\pi k}{n}$ при $\text{НСД}(k, n) = 1$).

Розглянемо тепер групу всіх симетрій правильного n – кутника на площині. Крім уже розглянутих n поворотів навколо центра n – кутника на кути $0, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi(n-1)}{n}$ ця група буде містити ще n осьових симетрій відносно прямих, що проходять через центр n – кутника та одну з його вершин або середину сторони. На площині ніяких інших симетрій правильний n – кутник не має. Справді, якщо φ – довільний рух 2-го роду площини, який переводить правильний n –кутник у себе, s – одна з його симетрій відносно однієї із вказаних вище n –осей, то $\varphi \circ s$ є вже рухом 1-го роду, який теж переводить n –кутник у себе, тобто є одним із n поворотів групи поворотів n – кутника:

$$\varphi \circ s = r^k,$$

де r – поворот на кут $\frac{2\pi}{n}$ навколо центра n – кутника, k – одне з чисел $1, 2, \dots, n$.

Оскільки $s^2 = \varepsilon$, то звідси отримаємо: $\varphi = r^k \circ s$. Неважко перевірити безпосередньо, що елементи $r \circ s, r^2 \circ s, \dots, r^n \circ s = s$ є осьовими симетріями відносно n – осей, що проходять через центр та одну з вершин або середину сторони правильного n – кутника.

Отже, група всіх симетрій правильного n –кутника на площині ізоморфна групі діедра D_n , оскільки вона породжується двома своїми елементами r і s , для яких справджуються співвідношення:

$$r^n = \varepsilon, s^2 = \varepsilon, (r \circ s)^2 = \varepsilon.$$

Ця група при $n > 2$ неабелева, оскільки

$$r \circ s = (r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1} = s \circ r^{n-1} \neq s \circ r.$$

Таким чином має місце наступне твердження.

Теорема. Група поворотів правильного n –кутника на площині ізоморфна циклічній групі C_n n –го порядку, а група всіх симетрій правильного n –кутника на площині ізоморфна групі діедра D_n .

Список використаних джерел:

1. Марач В.С., Крайчук О.В. Вибрані лекції з алгебри. Групи. Кільця. Поля. Ч.1. Рівне: Рівненський державний педінститут, 1995, 160с.

МНОЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ТА ДЕЯКЕ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Гуркіна Олена Михайлівна

E-Mail:olena.hurkina@student.karazin.ua

Науковий керівник: Гефтер Сергій Леонідович

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

1.1 Аналітичні функціонали

Нехай $A = A(\mathbb{C})$ — векторний простір цілих функцій з топологією рівномірної збіжності на компактах в $\mathbb{C}$. Неперервні лінійні функціонали в топологічному векторному просторі A називаються аналітичними функціоналами. Простір таких аналітичних функціоналів будемо позначати за A' . Якщо $T \in A'$ і $f \in A$, то дію лінійного функціонала T на вектор f будемо позначати як (T, f) , або $(T(z), f(z))$.

Теорема 5. Нехай $T \in A'$. Тоді існує така стала $M > 0$, що

$$|(T(z), z^n)| \leq M^n \text{ для всіх } n = 0, 1, 2, \dots, \text{ і}$$

$$(T, f) = \oint_{|z|=R} f(z) \omega(z) dz, \text{ де } R > M, \text{ і } \omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T(z), z^n)}{z^{n+1}} \quad (1)$$

Означення 6. Функція $\omega(z)$ називається перетворенням Коші-Стілтєса аналітичного функціонала T .

Відмітимо, що перетворення Коші-Стілтєса функціонала T є голоморфною функцією в області $|z| > \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(T(z), z^n)|}$ (див. [8]).

1.2 Похідна аналітичного функціоналу

Нехай $T \in A'$. Похідну функціонала T визначимо так, як і в класичній теорії узагальнених функцій: $(T', f) = -(T, f')$, $f \in A$.

Згідно з теоремою Вейерштрасса, лінійний функціонал T' є неперервним, тобто $T' \in A'$.

Теорема 6. Нехай $\omega(z)$ — перетворення Коші-Стілтєса аналітичного функціоналу T . Тоді ряд Лорана $\omega'(z)$ є перетворенням Коші-Стілтєса функціоналу T' .

1.3 $A'(C)$ як модуль над $A(C)$

Природним чином можна визначити операцію множення аналітичного функціоналу на цілу функцію. Нехай $T \in A'$ і $g \in A$.

$(gT, f) = (T, gf)$, $f \in A$. Ця операція узгоджується з операцією диференціювання.

Теорема 7. Векторний простір A' є диференціальним модулем над диференціальним кільцем A .

1.4 Добуток аналітичних функціоналів

Нехай $T_1, T_2 \in A'$ і ω_k є перетворенням Коші-Стілтєса аналітичного функціоналу T_k , $k = 1, 2$. Тоді існують такі сталі $M_1, M_2 > 0$, що

$$\omega_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_k(z), z^n)}{z^{n+1}} \text{ при } |z| > M_k, k = 1, 2.$$

З цього випливає, що ряд Лорана $\omega(z) = \omega_1(z)\omega_2(z)$ буде збігатись при $|z| > \max\{M_1, M_2\}$. Розглянемо тепер такий аналітичний функціонал T :

$$(T, f) = \int_{|z|=R} f(z)\omega(z)dz, \text{ де } R > M.$$

Функціонал T будемо називати добутком аналітичних функціоналів T_1 і T_2

Теорема 9. Нехай $T \in A'$. Тоді $T = \sum_{n=0}^{\infty} (T(z), z^n)\delta^{n+1}$.

Теорема 10. Нехай $T_1, T_2 \in A'$. Тоді $(T_1 T_2)' = T_1' T_2 + T_1 T_2'$.

Отже, векторний простір A' з розглянутою операцією множення є комплексною комутативною диференціальною алгеброю без одиниці.

1.5 Степеневі ряди за степенями δ -функції

Теорема 11. Нехай $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, $\alpha_n \in C$ — формальний степеневий ряд. Розглянемо ряд $\varphi(\delta) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta^{n+1}$ у просторі A' . Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta^{n+1}$ збігається тоді й тільки тоді, коли існує така стала $M > 0$, що $|\alpha_n| \leq M^n$, $n \in \mathbb{N}$. При цьому $\alpha_n = (T(z), z^{n-1})$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Наслідок 12. Нехай функція $\varphi(z)$ є голоморфною у деякому околі 0, і $\varphi(0) = 0$. Тоді є коректно визначеним аналітичний функціонал $\varphi(\delta)$, а саме, $\varphi(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta^n$, де $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$, $|z| < \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$.

1.6 Застосування до нелінійних еволюційних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$A'\{t\}$ - алгебра збіжних степеневих рядів за степенями дійсної змінної t , коефіцієнти яких належать алгебрі аналітичних функціоналів A' . Будемо розглядати звуження відповідних цілих функцій на дійсну вісь.

Елементи алгебри $A'\{t\}$ мають вигляд: $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$, де $u_n \in A'\{t\}$

Природньо визначаються частинні похідні елементів алгебри $A'\{t\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n(x) t^{n-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) t^n.$$

У якості прикладу застосування операції множення у просторі A' аналітичних функціоналів і степеневих рядів за степенями δ -функції отримаємо явну формулу для єдиного розв'язку наступної задачі Коші для рівняння типу Гамільтона-Якобі:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \right. \\ \left. u(0, x) = \delta(x) \right\} \quad (2)$$

Теорема 14. Розглянута задача Коші в алгебрі $A'\{t\}$ має єдиний розв'язок

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^k (3k)!}{(k+1)(3k+1)k!(2k+1)!} \delta^{3k+1}(x) t^k, \quad (3)$$

причому цей ряд збігається у просторі A' для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Список використаних джерел:

1. С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Г.П. Івасюк, Н.В. Рева. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. – Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2015. – 326 с.
2. Л. Ляшко І. І. та ін. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч./ І. І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. - К. : Вища шк., 1993. -. Ч. II. 375 с.
3. J.F. Colombeau, Multiplication of distributions. A tool in mathematics, numerical engineering and theoretical physics, Springer-Verlag, Berlin (1992).
4. P. Antosik, J. Mikusinski, and R. Sikorski, Theory of distributions. The sequential approach, Elsevier Science Publ. Co., Amsterdam; PWN, Warsaw (1973).
5. S.L. Gefter, O.L. Piven'. Nonlinear Partial Differential Equations in Module of Copolynomials over a Commutative Ring, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2025, vol. 21, Issue 3, p. 319–345. URL:<https://jmag.ilt.kharkiv.ua/index.php/jmag/article/view/1108/jm21-0319e> (Дата звернення 19.03.2026)
6. S.L. Gefter, A.L. Piven. Some class of nonlinear partial differential equations in the ring of copolynomials over a commutative ring. Front. Appl. Math. Stat. 2024, 10:1466569. URL:<https://doi.org/10.3389/fams.2024.1466569> (Дата звернення 19.03.2026)
7. В. Ya. Levin (in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko). Lectures on Entire Functions. AMS, vol. 150, 1996.
8. С. С. Лінчук, Ю. С. Лінчук. Оператори у просторах аналітичних функцій. Навчальний посібник. Чернів. нац. університет імені Ю. Федьковича. - Чернівці : Рута, 2011. - 148 с.

МОДЕЛЬ АКСІОМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Соколюк А.В.

E-mail: ansokoliuk@gmail.com

Крайчук О.В.

E-mail: a.kraychuk@gmail.com

Науковий керівник: Крайчук О.В.

Рівненський державний гуманітарний університет

Системою комплексних чисел називається алгебра $\langle C; +, \cdot; 0, 1, i \rangle$, для якої виконуються такі властивості (аксіоми комплексних чисел):

$$c_1: \forall a \in C, \forall b \in C, \forall c \in C, (a + (b + c) = (a + b) + c);$$

$$c_2: \forall a \in C, \forall b \in C, (a + b = b + a);$$

$$c_3: \exists 0 \in C, \forall a \in C, (a + 0 = a);$$

$$c_4: \forall a \in C, \exists -a \in C, (a + (-a) = 0);$$

$$c_5: \forall a \in C, \forall b \in C, \forall c \in C, (a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c);$$

$$c_6: \forall a \in C, \forall b \in C, \forall c \in C, (a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c);$$

$$c_7: \forall a \in C, \forall b \in C, (a \cdot b = b \cdot a);$$

$$c_8: \exists 1 \in C, \forall a \in C, (a \cdot 1 = a);$$

$$c_9: \forall a \in C, (a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in C, (a \cdot a^{-1} = 1));$$

$$c_{10}: \langle R; +, \cdot; 0, 1 \rangle, \text{ – система дійсних чисел};$$

$$c_{11}: R \subseteq C;$$

$$c_{12}: i (i^2 + 1 = 0);$$

$$c_{13}: (\text{Аксіома мінімальності}). \text{ Якщо } M \subseteq C \text{ і для } M \text{ виконуються умови:}$$

$$\text{а) } R \subseteq M; \text{ б) } i \in M; \text{ в) } \forall z_1 \in M, \forall z_2 \in M, (z_1 + z_2 \in M \wedge z_1 \cdot z_2 \in M), \text{ –}$$

то тоді $M = C$.

Аксіоми $c_1 - c_9$ характеризують C як поле відносно операцій додавання і множення, згідно c_{10}, c_{11} поле C є розширенням поля дійсних чисел. За аксіомою c_{12} у полі C рівняння $x^2 + 1 = 0$ має корені. За аксіомою мінімальності c_{13} поле C є мінімальним розширенням поля R дійсних чисел серед всіх розширень, які мають перераховані вище властивості.

Теорема. Аксіоматична теорія комплексних чисел несуперечлива.

Доведення. Доведемо несуперечливість відносно теорії дійсних чисел.

Розглянемо множину P пар (a, b) дійсних чисел і означимо операції $\oplus$ і $\otimes$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), (a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Так означені операції додавання і множення пар мають властивості асоціативності і комутативності, а операція множення дистрибутивна відносно додавання [1, с.103]. Нульовим елементом відносно додавання є $(0, 0)$, одиничним елементом відносно множення – $(1, 0)$. До будь-якої пари (a, b) у

множині P існує протилежний елемент $(-a, -b)$. Якщо пара (a, b) ненульова, то до неї в множині P існує обернений елемент $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Отже, множина P є полем, тобто в P виконуються перші дев'ять аксіом комплексних чисел. Виділимо в P підмножину R_0 всіх пар виду $(a, 0)$ і задамо відображення поля R дійсних чисел на множину R_0 : $(a) = (a, 0)$. Відображення – взаємно однозначне, тому поле P містить підполе, ізоморфне полю дійсних чисел, тобто в P виконуються аксіоми c_{10} і c_{11} комплексних чисел.

Для пари $(0, 1)$ справджується рівність $(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$, тому в P виконується аксіома c_{12} . Для перевірки виконання аксіоми мінімальності візьмемо в P довільну підмножину M , для якої виконуються такі умови:

а) $R_0 \subseteq M$; б) $(0, 1)M$;

в) $(a, b) \in M \wedge (c, d) \in M \Rightarrow (a, b) \oplus (c, d) \in M \wedge (a, b) \otimes (c, d) \in M$.

Нехай $(m, n) \in P$. Оскільки $(m, n) = (m, 0) \oplus (n, 0) \otimes (0, 1)$, то $(m, n) \in M$, тобто $M = P$. Це означає, що у полі P виконується аксіома c_{13} і P є моделлю аксіоматичної теорії комплексних чисел. Теорема доведена.

Можна побудувати ще одну модель аксіоматичної теорії комплексних чисел, взявши за основу множину P всіх квадратних матриць другого порядку $(ab - ba)$, де $a, b \in R$. Множина P є полем відносно операцій додавання і множення матриць [1, с.47]. Поле комплексних чисел C ізоморфне полю P . Ізоморфізм задається відображенням $\phi: C \rightarrow P$, для якого $(a + bi) = (ab - ba)$.

Відображення – взаємно однозначне і виконуються дві основні властивості ізоморфізму полів:

$$\begin{aligned} ((a + bi) + (c + di)) &= ((a + c) + (b + d)i) = \\ &= (a + cb + d - (b + d)a + c) = (ab - ba) + (cd - dc) = \\ &= (a + bi) + (c + di); \\ ((a + bi)(c + di)) &= ((ac - bd) + (ad + bc)i) = (ac - bd) + (ad + bc)i - \\ &= (ad + bc)ac - bd = (ab - ba)(cd - dc) = (a + bi)(c + di). \end{aligned}$$

Таким чином, ϕ – ізоморфізм поля C на поле P , тобто поле P є моделлю аксіоматичної теорії комплексних чисел.

Список використаних джерел:

1. Марач В.С., Крайчук О.В. Курс лекцій з алгебри. Основні поняття. Основні числові системи: навчальний посібник. Рівне: РДГУ, 2003, 110с.

ПОБУДОВА ГАМІЛЬТОНОВОГО ШЛЯХУ З ЦЕНТРУ ДОВІЛЬНОГО ГРАФА ХОДІВ КОРОЛЯ

Скопик Г.М.

E-mail: gms.4job@gmail.com

Онай М.В.

E-mail: onay@pzks.fpm.kpi.ua

Науковий керівник: Онай М.В.

*Національний технічний університет України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського"*

Ключові слова. Теорія графів, графи квадратної решітки, графи ходів короля, алгоритми на графах, гамільтонів шлях

Вступ. Графи широко застосовуються для моделювання структур і зв'язків у різних галузях, зокрема в інформатиці, логістиці та соціальних мережах. Вони дозволяють формалізувати складні системи у вигляді вузлів і ребер, що спрощує їхній аналіз. Завдяки цьому графові моделі є основою для багатьох алгоритмів оптимізації, пошуку та планування. Будь-яке дослідження, що стосується графів, має практичне й теоретичне значення, оскільки сприяє розвитку методів аналізу складних систем.

Огляд літератури. Задача побудови гамільтонових шляхів у графах квадратної решітки добре досліджена в межах теорії графів та комбінаторики. Наукова література встановлює для таких шляхів умови існування та пропонує алгоритми побудови. Однак вони здебільшого зосереджені на загальності та формальній повноті. Крім того, маючи граф квадратної решітки як підграф, граф ходів короля має характерні лише для нього спрощення. У цьому контексті запропоноване дослідження доповнює наявну літературу конкретним алгоритмом побудови гамільтонового шляху на графі ходів короля. У порівнянні з загальністю і формальною повнотою, в запропонованому алгоритмі більший акцент зроблено на структурну подібність результуючих шляхів, спрощення та наочність.

Об'єкт, суб'єкт та методи дослідження. Об'єктом дослідження є побудова гамільтонового шляху (далі – шляху) на графі ходів короля (далі – графі). Суб'єктом дослідження є алгоритм побудови шляху, що починається у центрі графа довільного розміру « w на h ». Крім цього алгоритм має бути простим і візуально зрозумілим. Простота в цьому випадку означає малу кількість унікальних кроків алгоритму і, як наслідок, високу візуальну подібність шляхів на графах з різними розмірами.

Перед створенням алгоритму проаналізуємо властивості графа. Для того,

щоб граф мав центр, необхідно, щоб його ширина w та висота h були непарними. Будемо вважати тривіальними випадки, коли ширина або висота графа дорівнюють одиниці. Тоді можемо ввести поняття радіус-ширини r_{width} та радіус-висоти r_{height} , для яких виконуються наступні рівності:

$$w = 1 + 2 * r_{width}; h = 1 + 2 * r_{height}; r_{width} \geq 1; r_{height} \geq 1.$$

Введемо поняття **зсуву** (displacement). Формально, зсув $(disp_x, disp_y)$ визначається як різниця координат між наступним та поточним вузлом шляху. Для першого вузла зсув приймається за $(0,0)$. Для координат використаємо осі X та Y , для яких позитивними напрямками є право та низ, відповідно. Оскільки розглядається граф ходів короля, зсув за кожною координатою приймає одне з трьох значень $\{0,1,-1\}$. Результируючі комбінації, тобто дев'ять пар координат, дозволяють описати будь-який з кроків шляху.

Введемо поняття **простого шляху**. Простий шлях складається з вузлів, через які можна прокласти лише один гамільтонів шлях. Наприклад, простий шлях утворюється послідовністю вузлів з координатами $[(0,0), (1,0), (2,0)]$, тобто послідовністю вузлів на одній прямій.

Під час створення алгоритму під **збереженням простоти** будемо розуміти рішення, що ведуть до більшої візуальної подібності шляхів на графах різного розміру або до меншої кількості унікальних кроків алгоритму (зокрема завдяки повторному використанню вже визначених кроків).

Перейдемо до створення алгоритму.

Проаналізуємо окремий випадок побудови шляху при $r_{width} = r_{height} = 1$.

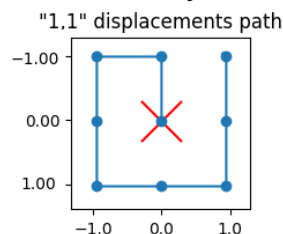


Рис. 1 : Послідовність зсувів для графа 3×3

Центр оточують вісім вузлів графа, до кожного з яких можна дістатись. Оберемо вузол прямо над центром. Сім вузлів, що залишились, утворюють простий шлях по периметру квадрата 3×3 , який можна пройти за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки. Оберемо шлях проти годинникової стрілки. В результаті отримали шлях на рис. 1.

Проаналізуємо побудову шляху при $r_{width} = r_{height} = 3$. Для збереження простоти, продовжимо побудову шляху з останнього вузла на рис. 1. Серед п'яти вузлів в оточенні необхідно обрати початковий. Після цього периметр квадрата 5×5 утворить простий шлях проти годинникової стрілки, і з вузла що є сусідом початкового відкриється квадрат 7×7 . В результаті порівняння початкових

вузлів, вузол зліва-зверху було обрано як такий, що найбільше сприяє збереженню простоти. Це можна спостерігати на шляху на рис. 2.

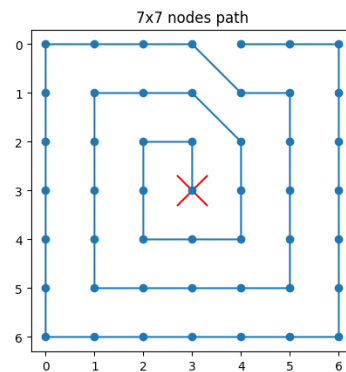


Рис. 2 : Вузли на шляху для графа 7x7

В ході схожих міркувань було отримано шляхи на рис. 3. Відповідні міркування пропущено заради стислості, нижче одразу наведено опис результатів.

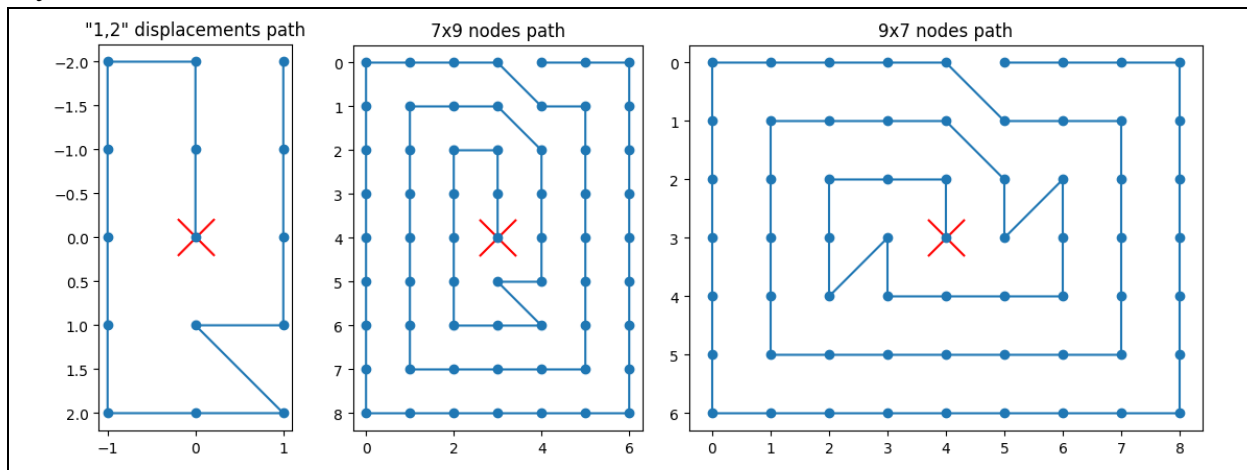


Рис. 3 : Шляхи для графів різного розміру

Результати. Завдяки прагненню зберегти простоту і структурованому аналізу прикладів, звели побудову шляху до двох унікальних кроків.

Першим кроком є побудова ядра (core). Поняття **ядро** позначає найменший можливий прямокутник, для сторін якого справджується $w, h \geq 3$ та $w - h = 2 * (r_{width} - r_{height})$. У порівнянні з квадратними ядрами, прямокутні ядра мають «внутрішні» вузли, тобто вузли, що розташовані всередині периметра ядра. Внутрішні вузли стають частиною шляху за допомогою зигзагів, які починаються у відповідних кутах ядра і закінчуються за один вузол до середини відповідної сторони ядра. Такий підхід дозволяє застосовувати один алгоритм побудови зигзагів для прямокутників як з більшою шириною, так і з більшою висотою, без обмежень на розміри.

Другим кроком, який повторюється необхідну кількість разів, є побудова оточення (enclose). Поняття **оточення** позначає шлях по периметру довільного прямокутника із сторонами непарного розміру, який починається з вузла справа-

знизу від середини верхньої сторони цього прямокутника.

Доведемо, що розроблений алгоритм працюватиме за будь-яких значень r_{width} та r_{height} . На рис. 1 показано шлях для $r_{width} = r_{height} = 1$ як базовий приклад успішної роботи алгоритму. За допомогою зигзагів можна змінити або ширину, або висоту ядра, і перейти до $r_{width} = 1 + z$ або $r_{height} = 1 + z$, де $z \in [1, \infty)$. За допомогою оточень від довільного прямокутника « m на n » можливо перейти до прямокутника « $(m+2*z)$ на $(n+2*z)$ », де $z \in [1, \infty)$. Це означає, що будь-який прямокутник із сторонами непарного розміру можна звести до ядра, і для будь-якого ядра можна побудувати гамільтонів шлях. Що і треба було довести.

Висновки. Результати теоретичної роботи є наступними. Успішно розроблено алгоритм побудови гамільтонового шляху з центру графа ходів короля. Введено терміни ядра та оточення, за допомогою яких доведено дієвість алгоритму для всіх графів « m на n » де $m = 2 * z_m + 1, n = 2 * z_n + 1; z_m, z_n \geq 1$.

Практично значимі результати є наступними. На основі розробленого алгоритму створено комп'ютерну програму мовою Python, яку можна застосовувати в різних галузях. Одним з застосувань алгоритму може бути пересування між прилеглими картографічними областями, що дозволяє вивільнити апаратні ресурси, пов'язані з обчислювально витратними запитами за координатами.

В перспективі можливо розробити узагальнене та розширене рішення, за якого алгоритм працює на графах із сторонами парного розміру та графах із сторонами, розмір яких менший за 3.

Список використаних джерел:

1. Ядренко М. В. Дискретна математика. Київ : ТБіМС. 2004. С. 215-240.
2. Bollobas, B. Graph Theory: An Introductory Course. New York: Springer-Verlag. 1979. 180 p.
3. Itai, Alon & Papadimitriou, Christos & Szwarcfiter, Jayme. Hamilton Paths in Grid Graphs. SIAM J. Comput. 1982. № 11. 676-686 pp. URL: https://www.researchgate.net/publication/220616693_Hamilton_Paths_in_Grid_Graphs (дата звернення: 19.04.2026)

СКІНЧЕННІ ТІЛА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Булавіна Н.О.

E-mail: bulavina9nadia@gmail.com

Крайчук О.В.

E-mail: a.kraychuk@gmail.com

Тілом називається довільне асоціативне кільце з одиницею, в якому для кожного ненульового елемента існує обернений елемент. Якщо операція множення є комутативною, то маємо поле, тобто комутативне тіло є полем.

Теорема. Довільне скінчене тіло є полем.

Доведення. Нехай K – скінченне тіло і Z – його центр, тобто множина всіх елементів із K , які переставні при множенні з усіма елементами тіла K :

$Z = \{z \mid za = az, z, a \in K\}$. Множина Z непорожня, бо $\theta, e \in Z$ і Z є полем, оскільки вона замкнена відносно операцій віднімання і множення:

$$\begin{aligned}\forall z_1, z_2 \in Z, \forall a \in K \quad (z_1 - z_2)a &= z_1a - z_2a = az_1 - az_2 = a(z_1 - z_2), \\ (z_1, z_2)a &= z_1(z_2a) = z_1(az_2) = (z_1a)z_2 = (az_1)z_2 = a(z_1z_2),\end{aligned}$$

Тому Z підкільце тіла K [1, с.9] і замкнена відносно взяття обернених елементів

$$\forall z \in Z, \forall a \in K \quad az^{-1} = (za^{-1})^{-1} = (a^{-1}z)^{-1} = z^{-1}a.$$

Операція множення в Z комутативна, тому Z є полем, причому скінченим, тобто $|Z| = q = p^m$, де p – просте натуральне число. Тіло K можна розглядати як векторний простір над полем Z , причому $[K:Z] = n$ для деякого натурального n . Фіксуємо в просторі K деякий базис $w_1, \dots, w_n$, дістанемо, що тіло K складається з q^n елементів. $\forall a \in K$ позначимо через Na множину всіх тих елементів із K , які переставні при множенні з елементами a : $Na = \{x \mid xa = ax, x \in K\}$. Очевидно, $Z \in Na$ для довільного $a \in K$. Підмножина Na сама є тілом, тобто підтілом тіла K . Для цього достатньо переконатися в замкненості підмножини Na відносно операцій віднімання, множення і взяття обернених елементів [1, с.10]. Для довільних елементів $b, c \in Na$ будемо мати:

$$\begin{aligned}(b - c)a &= ba - ca = ab - ac = a(b - c), \\ (bc)a &= b(ca) = b(ac) = (ba)c = a(bc).\end{aligned}$$

Якщо $b \neq 0$, то з $ba = ab$ випливає $b^{-1}(ba)b^{-1} = b^{-1}(ab)b^{-1}$, звідки $ab^{-1} = b^{-1}a$. Отже, $b - c, bc, b^{-1} \in Na$, тому підкільце Na є тілом. Так як операція множення в тілі асоціативна і, що для довільного його ненульового елемента існує обернений елемент, дістанемо, що множина всіх ненульових елементів довільного тіла є мультиплікативною групою. Розглянемо мультиплікативні групи K^*, Na^*, Z^* порядків $q^n - 1, q^d - 1$ і $q - 1$, де d – розмірність векторного простору Na над полем Z (тоді Na складається з q^d елементів). Очевидно, $Z^* \leq Na^* \leq K^*$, причому Z^* є центром групи K^* , а Na^* – нормалізатор елемента $a \in K^*$ у групі K^* . Покажемо, що $n \vdots d$. Оскільки Na^* є підгрупою групи K^* , то $q^n - 1$ ділиться на $q^d - 1$. Якщо $n = dk + t$, де $0 \leq t <$

d , то $q^n - 1 = q^{dk}q^t - 1 = q^t(q^{dk} - 1) + (q^t - 1)$. $q^{dk} - 1 = (q^d)^k - 1 = (q^d - 1)(q^{d(k-1)} + \dots + q^d + 1)$, то $q^{dk} - 1$ і $q^n - 1$ діляться на $q^d - 1$, отже $q^t - 1$ теж ділитися на $q^d - 1$, а це можливо лише у випадку $q^t - 1 = 0$. Тобто $t = 0$, бо $q^t - 1 < q^d - 1$. Отже, $n = dk$ і $n : d$. Група K^* розпадається на класи спряжених елементів $K(a_i)$, причому клас $K(a_i)$ складається лише з одного елемента тоді і тільки тоді коли $a_i \in Z^*$. Маємо многочлен поділу кола [1,с.10]:

$$\begin{aligned} q^n - 1 &= |K^*| = |Z^*| + |K(a_i)| + \dots + |K(a_1)| = \\ &= q - 1 + [K^* : Na_i^*] + \dots + [K^* : Na_1^*] = q - 1 + \frac{q^n - 1}{q^{d_i} - 1} + \dots + \frac{q^n - 1}{q^{d_1} - 1}, \end{aligned}$$

тобто $q^n - 1 = q - 1 + \sum_{t=1}^r \frac{q^n - 1}{q^{d_t} - 1}$, де $d_1, \dots, d_r$ додатні дільники числа n , відміні від n . Круговий многочлен $\phi_n(x)$ з цілочисловими коефіцієнтами, є дільником многочленів $x^n - 1$ і $\frac{x^n - 1}{x^{d-1}}$ з цілочисловими коефіцієнтами, для довільного додатного дільника d числа n , відмінного від n [1,с.103]. При $x = q$ ціле число $\phi_n(q)$ є дільником чисел $q^n - 1$ і $\frac{q^n - 1}{q^{d-1}}$ і числа $q - 1$. Оцінимо число $\phi_n(q) = (q - \varepsilon_1) \cdot \dots \cdot (q - \varepsilon_{\varphi(n)})$, де $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ первісні корені n -го степені з 1 (можна обмежитися випадком, коли ці корені обчислюються в полі комплексних чисел $\mathbb{C}$). Геометрично модуль числа $q - \varepsilon_i$ дорівнює відстані від точки ε_i до точки $q \geq 2$, що розміщена на дійсній осі, тому $|q - \varepsilon_i| \geq q - 1$, причому $|q - \varepsilon_i| = q - 1$ лише у випадку, коли $\varepsilon_i = 1$, тобто коли $n = 1$, бо ε_i – первісний корінь. Отже, $|q - \varepsilon_i| > q - 1$ для всіх $i = 1, \dots, \varphi(n)$. У випадку $n = 1$, $K = Z$, твердження теореми виконується. Для інших випадків маємо, $|\phi_n(q)| = |q - \varepsilon| \cdot \dots \cdot |q - \varepsilon_{\varphi(n)}| > q - 1$ і ціле число $\phi_n(q)$ не може бути дільником числа $q - 1$. Отримана суперечність показує, що $K = Z$, тобто скінчене тіло K є полем. Теорема доведена.

Список використаних джерел:

1. Маращ В.С., Крайчук О.В. Вибрані лекції з алгебри. Групи. Кільця. Поля. Ч.2. Рівне: Рівненський державний педінститут, 1996, 168с.

Викладання математики та інформатики: сучасні тенденції та перспективи

Teaching Mathematics and Computer Science: Modern Trends
and Prospects

ВИКОРИСТАННЯ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Єланський В.О.

E-mail: ielanskyu2021.9511963@student.karazin.ua

Науковий керівник: Лисиця Віктор Тимофійович

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

У сучасній математиці та її прикладних напрямках важливе місце займають задачі на оптимізацію геометричних величин, зокрема дослідження екстремальних властивостей тіл. У більшості шкільних підручників основна увага приділяється задачам на площині, значно рідше розглядаються просторові задачі, і майже не висвітлюються питання оптимального розподілу ресурсів для об'ємних фігур. У даній роботі наведено дослідження куба та тетраедра як базових многогранників, що мають різні геометричні характеристики та широко застосовуються як у теоретичних дослідженнях, так і в практичних задачах.

Актуальність даної теми зумовлена необхідністю впровадження математичних компетентностей учнів у STEM освіті. Ізопериметричні задачі сприяють глибшому розумінню взаємозв'язків між об'ємними тілами та принципів оптимізації в геометрії, які знаходять застосування в архітектурі, інженерії, комп'ютерному моделюванні, тощо. Важливою складовою розв'язання подібних задач є використання цифрового інструментарію, що надає змогу наочно простежити залежності між величинами та краще інтерпретувати отримані результати.

Постановка задачі. Дано куб та тетраедр, з фіксованою сумою об'ємів. Досліджується сума їхніх площ поверхонь при зміні об'ємів фігур.

На початковому етапі розв'язання розглядається тривимірна модель задачі, що дозволяє наочно дослідити взаємозв'язок між об'ємом і площею, провести експерименти і висунути гіпотези (рис. 1).

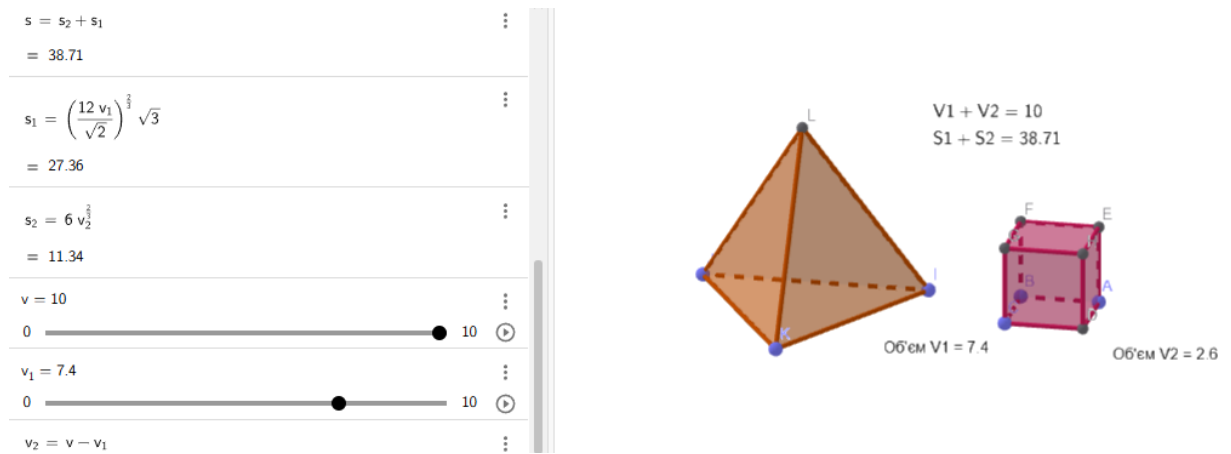


Рис. 1: Тривимірна модель задачі із застосуванням динамічного математичного середовища GeoGebra.

На основі проведеного візуального аналізу висувуються такі гіпотези:

1. куб має меншу площу поверхні при заданому об'ємі порівняно з тетраедром;
2. тетраедр має менший об'єм при заданій площі поверхні порівняно з кубом;
3. сума площ поверхонь куба та тетраедра за умови сталої суми їх об'ємів має екстремальне значення, зокрема максимум.

Сформульовані гіпотези потребують строгого математичного обґрунтування. Тому наступним етапом дослідження є аналітичний розгляд задачі, що передбачає встановлення функціональної залежності площ поверхонь від об'ємів фігур та подальше доведення висунутих тверджень.

Нехай S_1, V_1 - площа повної поверхні та об'єм тетраедра; S_2, V_2 - площа повної поверхні та об'єм куба; $S = S_1 + S_2, V = V_1 + V_2$.

Для доведення першої гіпотези потрібно, щоб $V_1 = V_2 = V_0 > 0$ та виконувалася нерівність: $6(V_0)^{\frac{2}{3}} < (6\sqrt{2}V_0)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3}$, яка перетвореннями зводиться до нерівності: $3 < 81$. Тобто вона дійсно виконується для будь-яких додатних V_0 , тому перша гіпотеза доведена.

Для доведення другої гіпотези потрібно, щоб $S_1 = S_2 = S_0 > 0$ та виконувалася нерівність: $(\frac{S_0}{6})^{\frac{3}{2}} > (\frac{S_0}{\sqrt{3}})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$, яка перетвореннями зводиться до нерівності: $1 > \frac{1}{3}$. Тобто вона теж вірна для будь-яких додатних S_0 , тому і друга гіпотеза доведена.

Для доведення третьої гіпотези потрібно знайти похідну функції $F(V_2) = 6(V_2)^{\frac{2}{3}} + (6\sqrt{2}(V - V_2))^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3}$, прирівняти її до нуля та розв'язати таке рівняння:

$$V_2^{(-\frac{1}{3})} - \sqrt{6} \cdot (6\sqrt{2}(V - V_2))^{(-\frac{1}{3})} = 0;$$

Отримаємо лише одну точку екстремуму (максимуму): $V_2 = \frac{V}{1+\sqrt{3}}$. Отже, третя гіпотеза теж доведена.

Проведене математичне доведення підтвердило висунуті гіпотези та дозволило перейти до їх інтерпретації з позицій оптимізації. Отримані результати свідчать, що з метою мінімізації сумарної площі поверхонь доцільно максимально “передати” об’єм кубу, оскільки саме ця фігура забезпечує найменшу площу поверхні при заданому об’ємі.

Водночас у випадку, коли за умовою задачі не можна знехтувати жодною з фігур, тобто обидві мають зберігати додатний об’єм, досягнення абсолютного оптимуму стає неможливим. Це, у свою чергу, підтверджує існування максимуму функції суми площ поверхонь при певному розподілі об’ємів між кубом і тетраедром.

Список використаних джерел:

1. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Геометрія: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень : підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти — Харків : Гімназія, 2019. — 240 с. : іл. URL: <https://files.pidruchnyk.com.ua/uploads/book/11-klas-geometria-merzljak-2019-prof-pogl.pdf> (дата звернення: 17.04.2026)
2. В. Лисиця, В. Сланський. Використання задач ізопериметричного типу у просторі в шкільному курсі математики. *Проблеми викладання математики у закладах освіти: теорія, методика, практика*: зб. тез IV Міжнар. конф. на честь О.В. Погорєлова., 23–25 берез. 2026 р. м. Харків. С. 202-204. URL: https://pogorelov.karazin.ua/2026/wp-content/uploads/2026/04/Tezy_Pohorielov_2026.pdf (дата звернення: 13.04.2026)
3. Geogebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата звернення: 13.04.2026)

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Бакум Олена Олександрівна

E-mail: bakum.olena@student.karazin.ua

Науковий керівник: Жовтоніжко І.М.

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Нині важко уявити будь-яку сферу життя без інформаційних технологій, і освіта не є винятком. Сьогодні вона потребує не лише оновлення змісту навчання, а й пошуку нових ефективних способів подання матеріалу. Особливо

це актуально для уроків математики, які відіграють важливу роль в освітньому процесі. Ця дисципліна формує логічне мислення, розвиває вміння аналізувати та узагальнювати інформацію. Водночас традиційні підходи до викладання, що зосереджені на поясненні теми та розв'язуванні однотипних завдань, часто не здатні зацікавити сучасних здобувачів освіти, які зростають у цифровому середовищі з постійним потоком інформації.

Використання інтерактивних дошок, планшетів, комп'ютерів та онлайн-платформ дозволяє зробити уроки більш наочними, динамічними й цікавими. Такі засоби сприяють адаптації навчального матеріалу до різного рівня підготовки учнів, підвищують їхню активність і взаємодію з учителем. Завдяки інтерактивним методам навчання зростає мотивація, а складні математичні поняття стають доступнішими для розуміння та запам'ятовування.

Сучасна педагогіка орієнтується на впровадження інтерактивних форм навчання, серед яких – математичні та логічні ігри, головоломки, групова робота та проєктна діяльність. Важливу роль відіграє також використання цифрових ресурсів і технічних засобів навчання.

Одним із найефективніших інструментів є інтерактивна дошка, яка поєднує традиційні методи викладання з мультимедійними можливостями, роблячи урок більш візуальним і динамічним. На уроках математики її можна використовувати для демонстрації підготовлених матеріалів з інтерактивними елементами, застосування онлайн-сервісів (LearningApps, GeoGebra, Desmos, Kahoot, WolframAlpha, Online Test Pad, Triventy, MozaBook), візуалізації складних математичних понять і просторових фігур, а також для залучення здобувачів до виконання інтерактивних завдань.

Інтерактивні технології особливо актуальні в умовах дистанційного та змішаного навчання. Онлайн-платформи, такі як Google Classroom, Microsoft Teams, Moodle, а також спеціалізовані ресурси для вивчення математики – KhanAcademy, GeoGebra Classroom, Matific – забезпечують доступність, гнучкість та інтерактивність освітнього процесу. Вони дають змогу створювати навчальні матеріали, перевіряти знання учнів і організовувати ефективну взаємодію незалежно від формату навчання.

Важливим інноваційним підходом є також гейміфікація, яка передбачає впровадження ігрових елементів у навчальний процес. Вона сприяє підвищенню мотивації учнів, робить навчання більш захопливим і ефективним. Ігрові методи можуть використовуватися як для засвоєння нового матеріалу, так і для закріплення знань і розвитку практичних навичок.

Водночас ефективне використання інтерактивних технологій вимагає від учителя високого рівня цифрової компетентності, а також належного технічного забезпечення закладу освіти.

Отже, інтеграція сучасних технологій – інтерактивних дошок, комп'ютерів, планшетів, онлайн-платформ і гейміфікації – у процес навчання математики сприяє підвищенню якості освіти та формуванню ключових компетентностей здобувачів середньої освіти. Зокрема, розвиваються критичне мислення, навички роботи з інформацією, уміння співпрацювати та відповідально ставитися до власної діяльності. При цьому упровадження цих засобів потребує належної підготовки педагогів і системного контролю за ефективністю використання цифрових технологій.

Список використаних джерел:

1. Вігура Т. Використання інтерактивних технологій на уроках математики // Наукові публікації. – Житомир, 2024. – URL: <https://surl.li/ypfhnw> (дата звернення: 18.04.26р.).
2. Волошена В.В. Гейміфікація як інтерактивний засіб навчання математики // Проблеми сучасного підручника. – 2024. – № 33. – С. 57-67. – URL: <https://doi.org/10.32405/2411-1309-2024-33-57-67> (дата звернення: 18.04.26р.).

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНИХ ПАКЕТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Танаєва Є.В.

E-mail: tanaykaeliza@gmail.com

Науковий керівник: Буценко Ю.П.

*Національний технічний університет України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського"*

1. ВСТУП

В наш час студенти часто шукають шляхи для «полегшення» обчислення задач з математичного аналізу, що пришвидшує обчислення та економить час, але не допомагає студентам самостійно аналізувати та розуміти поставлену перед ними задачу. Тож в найгіршому випадку все зводиться до того, що люди набирають команди, програма розв'язує і відповідь переноситься у зошит. Слід зазначити, що хоча найпопулярнішим вибором зазвичай стають саме швидкі онлайн-калькулятори, проблема їх використання полягає, перш за все, у відірваності машинної логіки від університетської програми. Адже, доволі легко

заплутатися, коли сервіс хоч і розписує рішення, але використовує надто громіздкі або зовсім інші заміни змінних. Більше того, такі програми часто видають лише сухий кінцевий результат, зовсім не пояснюючи геометричної логіки — чому межі інтегрування розставлені саме так, а не інакше.

На сьогодні ринок математичних програмних пакетів може запропонувати учасникам навчального процесу безліч варіантів, починаючи від потужних систем комп'ютерної алгебри (Wolfram Mathematica, Maple, SAGE) та інструментів візуалізації (GeoGebra,), до покрокових онлайн-калькуляторів типу WolframAlpha чи Symbolab.

У даній роботі буде наведено приклад використання хмарної версії програмного пакету SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation): Sage cell server, — для обчислення кратних інтегралів, проведено порівняння з традиційним обчисленням та зроблено висновок щодо доцільності вибору метода розрахунків.

2. ТРАДИЦІЙНИЙ РОЗРАХУНОК & ПРОГРАМНИЙ ПАКЕТ

При ручному розрахунку студенти дотримуються такого алгоритму:

1. Зображають область інтегрування.
2. Вибирають систему координат (сферична, циліндрична, декартова, полярна тощо).
3. Розставляють межі інтегрування.
4. Виконують послідовне інтегрування.

У програмному забезпеченні користувачу потрібно лише ввести потрібну команду (рівнянні і межі), і програма миттєво покаже готовий результат.

ПРОБЛЕМАТИКА РУЧНОГО ОБЧИСЛЕННЯ

Проблема вирішення подібних інтегралів на папері, полягає, перш за все, у візуалізації області. Доволі легко помилитися в межах інтегрування, якщо неправильно визначити лінії перетину поверхонь (тих таки параболоїдів або еліпсоїдів) або ж загубити мінус при обчисленні. У той же час математичний програмний пакет швидко вирішує дану проблему, тому ймовірність помилки на цьому етапі буде нижче, і студенту лишається лише перемалювати те що видала програма у зошит. Це особливо полегшує малювання тривимірного об'єкту для розрахунку потрібних інтегралів в задачах на знаходження об'єму або електричного заряду.

3. ПРИКЛАД ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ПАКЕТУ SAGE (А ТОЧНІШЕ ХМАРНОЇ ВЕРСІЇ SAGE CELL SERVER) У ЗАВДАННІ 7:

```

1 x, y = var('x, y')
2
3 # 1. Візуалізація області D
4 # Коло задано неявно, тому використовуємо implicit_plot
5 p_circle = implicit_plot(x**2 + y**2 - 2*y == 0, (x, -1.5, 1.5), (y, -0.5, 2.5), color='blue', legend_label='Коло: x^2 + y^2 - 2y = 0')
6 p_line = plot(x/sqrt(3), (x, 0, 1.5), color='red', legend_label='Пряма: y = x/sqrt(3)')
7 p_axis = plot(0, (x, 0, 1.5), color='black', legend_label='Вісь: y = 0')
8
9 # Зафарбовуємо область, яка лежить всередині кола, нижче прямої і вище осі X
10 p_fill = region_plot([x**2 + y**2 - 2*y <= 0, y <= x/sqrt(3), y >= 0], (x, 0, 1.5), (y, 0, 1), incol='lightgreen')
11
12 print("1. Візуалізація області інтегрування:")
13 # aspect_ratio=1 робить коло рівним (не сплюснутим)
14 show(p_circle + p_line + p_axis + p_fill, figsize=5, aspect_ratio=1)
15
16 # 2. Аналітичне обчислення площі
17 # Для цього завдання математично набагато простіше інтегрувати по осі Y (від 0 до 1/2)
18 # Тоді права межа фігури - це коло (x = sqrt(2y - y^2)), а ліва - пряма (x = sqrt(3)*y)
19 f_right = sqrt(2*y - y**2)
20 f_left = y * sqrt(3)
21 y_min = 0
22 y_max = 1/2
23
24 # Рахуємо подвійний інтеграл (інтегруємо 1 спочатку по dx, потім по dy)
25 area_S = integrate(integrate(1, x, f_left, f_right), y, y_min, y_max)
26
27 print("2. Площа фігури (аналітичний розрахунок):")
28 print("S = {}".format(area_S))

```

Рис. 1: Приклад коду

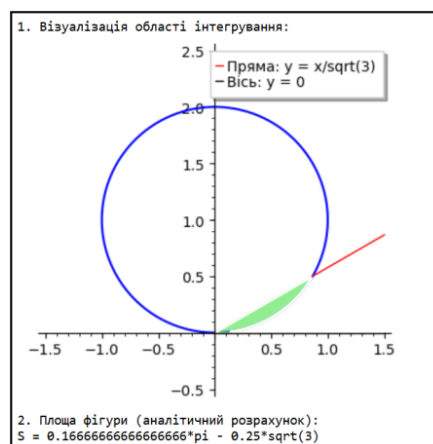


Рис. 2: Результат виконання коду

Хмарна версія програмного пакету SAGE: Sage cell server базується на використанні мови програмування Python. Користувач пише відповідний код (Рис.1) для завдання, після чого сервер автоматично проводить обчислення, генерує графік і видає відповідь (Рис.2). Потрібно також зазначити, що програмний код для обчислень та візуалізації був написаний та адаптований за допомогою інструментів генеративного штучного інтелекту, що є частою практикою оптимізації роботи. Спираючись на офіційну документацію, можна виділити такі ключові можливості, даного хмарного пакету:

1. Програма бере на себе розрахунок кратних інтегралів, границь та похідних. Це гарантує, що при розрахунку не "загубиться мінус" чи не буде помилки у дробах на проміжних етапах.
2. Пакет динамічно будує графіки, криві та просторові поверхні, акуратно зафарбовуючи складні області. Це дозволяє побачити ту саму область інтегрування, і лишається лише перенести готовий малюнок у зошит.

3. Автоматично розв'язує рівняння та нерівності, що допомагає при пошуку точних точок перетину кривих для розстановки меж інтегрування.

4. Окрім математичного аналізу, пакет вирішує задачі з лінійної алгебри, диференціальних рівнянь, статистики та комбінаторики.

4. ВИСНОВОК

Отже, якщо проаналізувати обидва підходи, можна зробити висновок, що не зважаючи на потужність програмних пакетів та ризик помилок при ручному обчисленні, традиційний розрахунок, на мою думку, є кориснішим для формування навичок аналізування та пошуку рішень виконання задач студентами. А програмні пакети (такі як SAGE) доцільно використовувати як інструмент для перевірки результатів. Водночас для подолання головної проблеми — складності візуалізації та пошуку меж інтегралів — найефективнішим є комбінований підхід: використання спеціалізованих додатків (наприклад, GeoGebra) для побудови графіків із подальшим ручним обчисленням самого інтеграла.

Список використаних джерел:

1. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Математика в технічному університеті. Том 3: підручник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 466 с.
2. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2003. С. 3–16.
3. Кобильник Т. П., Когут У. П. Системи комп'ютерної математики у навчанні студентів напряму підготовки «Інформатика». Інформаційні технології і засоби навчання. 2014. Том 40. № 2. С. 50–64.
4. Коваленко В. Ф., Орловський І. В. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Теорія поля. Диференціальні рівняння: збірник завдань до типової розрахункової роботи. Київ: НТУУ «КПІ», 2014. 80 с. (Використано: завдання 7, варіант 10).
5. Матеріали XIII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків (9–10 травня 2025 р.). Секція 4. Київ, 2025. С. 154, 162, 164.
6. Офіційний сайт відкритої системи комп'ютерної алгебри SageMath та сервіс Sage Cell Server. URL: <https://sagecell.sagemath.org> (дата звернення: 04.04.2026).
7. Офіційний сайт математичного програмного забезпечення з відкритим вихідним кодом SageMath. URL: <https://www.sagemath.org> (дата звернення: 04.04.2026).
8. SageMathCell Development Team. Технічна документація та опис проєкту

- SageMathCell. Матеріали відкритого репозиторію GitHub. URL: <https://github.com/sagemath/sagecell> (дата звернення: 04.04.2026).
9. The Sage Developers. Sage Reference Manual. Офіційна документація відкритої системи комп'ютерної алгебри SageMath. URL: <https://doc.sagemath.org> (дата звернення: 04.04.2026).

ДУАЛЬНА ФОРМА ЗДОБУТТЯ ОСВІТИ ЯК ОДНА З МОДЕЛЕЙ ПОЛІПШЕННЯ ЯКОСТІ ПІДГОТОВКИ ІТ-СПЕЦІАЛІСТІВ

Федоренко К.О.

E-mail: fedorenkokate866@gmail.com

Науковий керівник: Кубайчук О.О.

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Дуальна освіта — одна з форм здобуття освіти, передбачених статтею 9 Закону України «Про освіту» [2]. Поєднуючи теорію у вищому навчальному закладі (до 40%) з практичною підготовкою на робочому місці (до 60%), така модель покликана підготувати не просто дипломованих спеціалістів-теоретиків, а конкурентоспроможних фахівців, здатних ефективно працювати в реальних ринкових умовах.

Ідея поєднання балансу теорії та практики на конкретному підприємстві з'явилась і найбільшого поширення здобула у Німеччині [4]. Втім, незважаючи на високий інтерес учених і освітян до проблематики розвитку дуальної освіти, дана форма здобуття фахових компетенцій досі залишається недостатньо дослідженою в Україні. Більше того, сьогодні ще залишаються не повною мірою визначені правові та організаційні засади реалізації освітнього процесу за дуальною моделлю [5].

Дослідження KSE Institute та Міністерства освіти України свідчить, що в Україні дуальна освіта, впровадження якої активно розпочалося у 2018 році, поки що не стала поширеним явищем. Так, у 2024 р. дуальну освіту обрали лише 5 тисяч здобувачів освіти, а в деяких регіонах, як-от Чернівецька область, — не було жодного вступника на дуальні програми. Низькою є залученість до дуальної форми навчання українського бізнесу: лише 1,4% беруть участь в дуальній формі здобуття освіти, тоді як середній показник в ЄС — 32,4%. При цьому 21,8% представників компаній не розуміють умов взаємодії між підприємством та закладом освіти [3].

Одним із найскладніших є визначення чітких меж між дисциплінами, які мають викладатися в університеті, та тими, що можна інтегрувати у роботу. Це

ускладнює реалізацію дуальної освіти для бакалаврів, особливо на початкових курсах, наголошують у компанії SoftServe, яка у 29 вищих навчальних закладах України запровадила дуальні ІТ-програми, а з двома університетами реалізовувала дуальну освіту відповідно до законодавства. Іншою складністю, додають у SoftServe, є документальна частина — формалізація дуальної освіти потребує значного адміністративного ресурсу [1].

Втім їхній досвід доводить, що дуальна освіта для спеціалістів у ІТ-сфері — це реальний інструмент трансформації освітнього процесу, який приносить користь усім учасникам:

1. *Для здобувачів* — отримання реального досвіду роботи, фінансова винагорода під час навчання та гарантоване працевлаштування.
2. *Для бізнесу* — підготовка кадрів «під себе», зменшення витрат на адаптацію нових співробітників та підвищення конкурентоспроможності.
3. *Для держави* — зменшення рівня молодіжного безробіття та відповідність кваліфікацій потребам економіки.

Така модель здобуття освіти особливо актуальна у викладанні математики та інформатики для студентів уже з першого курсу. Вони мають навчатися свідомо і з самого початку розуміти «прикладність» спеціалізації, яку здобувають. Саме дуальна освіта може стати «формулою успіху», яка підвищить конкурентоспроможність випускників ІТ-спеціальності на ринку праці, забезпечуючи їх практичними навичками.

Що пропонується:

1. Розробити та затвердити внутрішнє «Положення про дуальну форму здобуття вищої освіти», керуючись наказами МОН України (наприклад, № 426 від 13.04.2023).
2. Підписати договори про співпрацю з підприємствами (роботодавцями), що забезпечать робочі місця, наставників та офіційне працевлаштування.
3. Спільно з роботодавцями переглянути освітню програму, інтегрувавши практичні завдання з підприємства в індивідуальні навчальні плани студентів.
4. Провести конкурсний відбір серед студентів денної форми, які бажають працювати за фахом та перевести їх на дуальну форму, укласти індивідуальні трудові договори та видати наказ про переведення.
5. Організувати навчання, де студент здобуває теоретичні знання в університеті, а професійні компетентності — на підприємстві під керівництвом наставника.
6. Оцінювати результати навчання спільно з роботодавцем та відображати форму навчання в дипломі.

Отож, в складних умовах сьогодення дуальну освіту слід розглядати як ефективний інструмент швидкого подолання дефіциту кваліфікованих робочих кадрів, необхідних для відбудови інфраструктури та економіки. Для цього необхідно удосконалювати на рівні держави нормативну базу, зокрема розробити стандарти, що регламентуватимуть права та обов'язки закладів освіти, підприємств та студентів, а компаніям ставати активними партнерами вищих навчальних закладів, беручи участь у розробці навчальних програм та забезпечуючи студентів робочими місцями. Головне — це синергія зусиль університету, компаній та студента, а також готовність до викликів і пошуку нових рішень.

Список використаних джерел:

1. SoftServe трансформує освіту: досвід впровадження дуального навчання на прикладі 16 IT- програм. — URL: <https://osvitanova.com.ua/posts/6672-softserve-transformuie-osvitu-dosvid-vprovadzhennia-dualnoho-navchannia-na-prikladi-16-it-prohram> (Дата звернення 10.03.2026)
2. Закон України «Про освіту». — Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text> (Дата звернення 10.03.2026)
3. Каракай А. Савісько М., Дуальна освіта в Україні: як масштабувати і збільшити участь бізнесу. Центр дослідження освіти в надзвичайних ситуаціях (KSE Institute) за підтримки Міністерства освіти України., 2025 р.—URL: <https://kse.ua/wp-content/uploads/2025/09/Zvit.-Dualna-profesiyno-tehnichna-osvita.pdf> (Дата звернення 10.03.2026)
4. Марценюк Л.В., Дуальна освіта як засіб ефективного поєднання теорії та практики. Review of Transport Economics And Management, 4 (20), 154–164. — URL: <https://pte.ust.edu.ua/article/view/228876/228236> (Дата звернення 10.03.2026)
5. Холявко Н., Мельниченко А., Впровадження дуальної освіти в університетах України: синергетичні ефекти для стейкхолдерів. Економічні науки ISSN 2307-5740. Вісник Хмельницького національного університету 2022, № 2, Том 2, 315.

ЕЛЕКТРОННІ ТАБЛИЦІ ЯК ДИДАКТИЧНИЙ ЗАСІБ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У 7 КЛАСІ

Артем Бондаренко

E-mail: artem.sysa@student.karazin.ua

Науковий керівник: Вельма Світлана Володимирівна

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Одним з головних завдань сучасної шкільної математичної освіти є розвиток в учнів здатності використовувати математичні інструменти для розв'язування прикладних задач. Тема «Системи лінійних рівнянь» у курсі алгебри 7 класу займає центральне місце, оскільки формує фундаментальні математичні уявлення, необхідні для подальшого опанування як шкільного курсу математики, так і суміжних навчальних дисциплін. Традиційні підходи до навчання часто не забезпечують достатнього рівня усвідомлення алгоритмів розв'язування та наочного розуміння геометричного змісту систем рівнянь. Тому актуальним є впровадження електронних таблиць (ЕТ) як дидактичного засобу, що поєднує обчислювальну потужність із широкими можливостями візуалізації.

Електронні таблиці (Microsoft Excel і Google Sheets) є загальнодоступними програмними засобами, що активно використовуються у сфері освіти. Їхній дидактичний потенціал для навчання систем лінійних рівнянь реалізується за кількома напрямками. По-перше, ЕТ забезпечують автоматизацію обчислень: учень може ввести коефіцієнти рівнянь у клітинки таблиці й миттєво отримати результат за формулою, зосередивши увагу на розумінні алгоритму, а не на рутинних арифметичних операціях. По-друге, вбудований інструментарій побудови діаграм дозволяє реалізувати графічний метод розв'язування: лінійне рівняння задається таблицею значень, а ЕТ автоматично будує відповідний графік. Точка перетину двох прямих стає наочним і динамічним підтвердженням розв'язку системи.

Метод підстановки в середовищі ЕТ набуває нового методичного оформлення. Учень виражає одну змінну через іншу безпосередньо у формулі клітинки, після чого підставляє отриманий вираз у друге рівняння. Зміна будь-якого коефіцієнта миттєво перераховує весь ланцюжок залежностей, що унаочнює вплив параметрів на розв'язок. Метод додавання реалізується через окремий стовпець, у якому записується сума лівих і правих частин рівнянь із попередньо підібраними множниками. Учень спостерігає, як одна зі змінних «знищується», й аналізує умову, за якої це стає можливим. Обидва методи в такому поданні стають прозорими за своєю логікою та доступними для самостійного дослідження.

Окремого розгляду заслуговують функціональні можливості ЕТ, що розширюють традиційний навчальний процес. Функція «Підбір параметра» (Goal Seek) у Excel або аналогічний інструмент у Google Sheets дозволяє розв'язувати рівняння й системи ітераційно, не вдаючись до ручних обчислень. Надбудова «Пошук рішення» (Solver) реалізує більш загальний підхід. Умовне форматування дає змогу виділяти клітинки з розв'язком або вказувати на суперечливість чи невизначеність системи, що формує розуміння класифікації

систем за кількістю розв'язків. Динамічне пов'язування таблиць і графіків – зміна коефіцієнта у таблиці одночасно змінює положення прямої на графіку – формує інтуїтивне розуміння взаємозв'язку між аналітичним і геометричним записом.

Таким чином, електронні таблиці є ефективним дидактичним засобом навчання систем лінійних рівнянь у курсі алгебри 7 класу. Їх застосування дозволяє реалізувати графічний метод, метод підстановки та метод додавання в інтерактивному й наочному вигляді, автоматизувати обчислення, забезпечити миттєвий зворотний зв'язок і підтримати дослідницьку діяльність учнів. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою комплексу практичних задач, готових шаблонів у середовищі ЕТ та перевіркою їхньої ефективності в реальній навчальній практиці.

Список використаних джерел:

1. Використання інструментів Google у математичній підготовці студентів / Фурсикова Т. В., Шлянчак С. О., Ханенко Л. Д. // Сучасні аспекти розвитку фізико-математичних наук в епоху цифровізації : Наукова монографія. Рига, Латвія: «Baltija Publishing», 2022. С. 132-145. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-271-5-5> (Дата звернення 19.03.2026)
2. Державний стандарт базової середньої освіти. Постанова КМУ № 898 від 30.09.2020. URL: <https://mon.gov.ua> (Дата звернення 19.03.2026)
3. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. 315 с.
4. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ / С. А. Раков; Харківський національний педагогічний ун-т ім. Г.С. Сковороди. Х.: Факт, 2005. 360 с.

ЗАДАЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ: ТЕОРЕТИКО-ДИДАКТИЧНИЙ ТА АЛГОРИТМІЧНИЙ АСПЕКТИ

Ковпак Михайло Артемович

E-mail: mishakovpak2007@gmail.com

Науковий керівник: Блажієвська Ірина Петрівна

Київський політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського

1. Вступ та постановка проблеми

Ключовою проблемою вищої математичної освіти у технічних університетах залишається подолання формалізму – стану, за якого студент

відтворює визначення й теореми без розуміння їхнього змісту. Дослідження PISA і TIMSS фіксують стабільну тенденцію: попри відносно високі показники алгоритмічних навичок, рівень математичного міркування та моделювання залишається низьким. Для технічних спеціальностей це набуває особливої гостроти: студент, що не розуміє математичної структури задачі, не здатний застосовувати апарат у фахових дисциплінах – опорі механіки, теорії кіл, теорії керування.

Задачний підхід, розроблений у рамках теорії розвивального навчання і концепції поетапного формування розумових дій, розглядає навчальну математичну задачу не як вправу на застосування алгоритму, а як модель пізнавальної ситуації, що потребує самостійної побудови методу розв'язання. Задача виступає основною одиницею навчального процесу, а система задач та їх публічний захист – інструментом конструювання математичного знання та професійної сміливості [4].

Мета дослідження: (а) формалізація поняття навчальної задачі засобами теорії складності та математичного аналізу; (б) побудова ієрархічної системи задач для ключових розділів курсу вищої математики КПІ ім. Ігоря Сікорського; (в) емпірична перевірка ефективності запропонованої методики на студентах інженерних факультетів.

2. Теоретичні засади: математична структура навчальної задачі

Навчальну задачу формалізовано як трійку $T = \langle S, G, O \rangle$, де S – множина початкових умов, G – цільова умова, O – допустимі операції. Розв'язання полягає у побудові скінченного ланцюжка операцій з O , що переводять стан S у стан, який задовольняє G . Така формалізація природно пов'язує дидактику з теорією алгоритмів і дозволяє класифікувати задачі за обчислювальною складністю.

Означення 1. Задачу T називають *конструктивною*, якщо існує поліноміально обмежений алгоритм A , що будує розв'язок за час $O(n^k)$, де $n = |S|$, $k \in \mathbb{N}$.

Означення 2. Задачу T називають *дослідницькою*, якщо жоден відомий поліноміальний алгоритм не розв'язує її в загальному випадку, проте верифікація окремих екземплярів є ефективною [1].

3. Приклади застосування у ключових розділах курсу вищої математики

Дискретна математика та теорія алгоритмів. Алгоритм Дейкстри - пошуку найкоротшого шляху у зваженому орієнтованому графі $G = (V, E, w)$ ребер, що задається множиною вершин V , множиною ребер E та ваговою функцією w . Така конструктивна задач з прямим виходом на комп'ютерні мережі та задачі маршрутизації – традиційно актуальні для студентів ФІОТ і КПІ

загалом. Методично важливим є аналіз *інваріанту циклу*: після кожної ітерації для всіх оброблених вершин $v \in S$ значення $d(v)$ є точною відстанню від джерела. Доведення коректності через цей інваріант – приклад дослідницької задачі, що формує навички математичної індукції та аналізу алгоритмів [2].

Математичний аналіз. Центральною дидактичною проблемою курсу є засвоєння кількісного характеру граничних переходів. Задачний підхід передбачає самостійну конструкцію функції $\delta(\varepsilon)$ для конкретних класів функцій. Ключовий методичний момент у ε - δ задачах – пошук допоміжного обмеження на область зміни x , ми замінюємо його лінійною мажорантою (оцінкою зверху). Цей прийом є прикладом когнітивної схеми – повторюваної стратегії, яку студент-інженер має свідомо засвоїти для подальшого застосування в курсах диференціальних рівнянь і теорії функцій комплексної змінної. [6]

Інженеру, важливо бачити математику "в дії". При вивченні математичного аналізу робиться акцент на функціях багатьох змінних та кратних інтегралах через призму градієнта, задач $\min/\max$ та якобіана. Розглядаємо останній як міру деформації, що є критично важливим при створенні ігрових світів або складних візуальних ефектів. Досліджуючи динамічні та метричні характеристики через написання коду, студенти бачать, як абстрактні формули перетворюються на реальну логіку трансформації фігур у віртуальному просторі

Теорія ймовірностей та математична статистика. Курс рясніє контрінтуїтивними результатами, що руйнують побутові уявлення і створюють мотивацію для вивчення математичного апарату. Класичним прикладом є парадокс днів народження: точне обчислення підтверджує $P(23) \approx 0,507$, що суперечить наївній оцінці. Для студентів технічних спеціальностей особливо значущою є кількісна сторона закону великих чисел: нерівність Чебишева не лише стверджує збіжність, а й дає конкретну оцінку швидкості, що безпосередньо застосовується у теорії надійності та обробці сигналів [3].

4. Педагогічний експеримент та результати

Для перевірки ефективності запропонованого задачного підходу протягом 2024–2025 навчального року було проведено педагогічне дослідження. Базою експерименту виступили академічні групи першого курсу механіко-математичного факультету КНУ ім. Т.Г. Шевченка. Загальна вибірка склала 112 студентів, які були розподілені на дві репрезентативні групи: контрольну (КГ, $n=56$) та експериментальну (ЕГ, $n=56$). Групи КГ навчалась за традиційною методикою; ЕГ – за задачним підходом із систематичним включенням конструктивних і дослідницьких задач, пов'язаних із фаховими застосуваннями.

Оцінювання проводилось за трьома критеріями: (А) відтворення означень і теорем; (Б) розв'язання стандартних задач; (В) розв'язання нестандартних

(дослідницьких) задач. Кожен критерій оцінювався за 10-бальною шкалою. Результати (середні бали $\pm$ стандартне відхилення):

Критерій А: КГ: $7,4 \pm 1,2$; ЕГ: $7,6 \pm 1,1$.

Критерій Б: КГ: $6,8 \pm 1,4$; ЕГ: $7,9 \pm 1,0$.

Критерій В: КГ: $4,3 \pm 1,8$; ЕГ: $6,7 \pm 1,5$.

Статистичну значущість відмінностей перевірено за критерієм Стьюдента (двовибірковий t-тест). Для критерію В отримано $t = 7,14$ при $df = 110$ і $p < 0,001$, що свідчить про суттєву перевагу ЕГ у задачах дослідницького типу. Для критерію А різниця є статистично незначущою ($p = 0,38$), що підтверджує: задачний підхід не поступається традиційному у засвоєнні теоретичного матеріалу, але суттєво перевершує його у формуванні дослідницьких компетентностей, що особливо важливо для підготовки інженерів-дослідників.

Якісний аналіз робіт виявив закономірність: студенти ЕГ значно частіше застосовували метакогнітивні стратегії – явне формулювання плану розв'язання, перевірку окремих кроків і рефлексію щодо вибору методу. Це корелює з теоретичними положеннями концепції Гальперіна про роль орієнтувальної основи дії у формуванні розумових операцій.

На базі кафедри ІСТ ФІОТ реалізується модель порівняльного аналізу між трьома потоками. Завдяки компактності та адаптивності потоку ІА, він був обраний як експериментальний майданчик для впровадження нових освітніх стандартів. Автором заплановано масштабувати «задачний та компетентісний підхід» безпосередньо в інженерну освіту на ФІОТ, КПІ ім. Ігоря Сікорського. З 2025р на 126 спеціальності, потік ІА, проводиться пілотне дослідження. На потоці ми додаємо компетентісний підхід до стандартів: використовуємо Kahoot, проходимо формат технічних співбесід в Zoom та готуємо презентації із застосуванням програмного моделювання. Водночас потоки ІК та ІС спеціальності 126 навчаються за класичною моделлю. Це створює ідеальні умови природнього експерименту. На базі екзаменаційних оцінок можемо зробити статистичний аналіз порівняння середніх (t-тест Стьюдента) для ЕГ=потік ІА(53) та КГ=потоки ІС+ІК(129), дослідити структуру розподілів за категоріальними оцінками (χ^2 -тест), реалізувати тест Колмогорова-Смирнова та обчислити ймовірність переваги - бути в потоці ІА, або в ІС/ІК [5].

5. Висновки

1) Формалізація навчальної задачі у вигляді трійки $\langle S, G, O \rangle$ і класифікація задач за обчислювальною складністю забезпечують теоретично обґрунтовану основу для проектування систем задач у курсах вищої математики технічного університету.

2) Система задач, побудована за принципом наростання рефлексивності – від репродуктивних через конструктивні до дослідницьких – достовірно підвищує рівень математичної компетентності студентів інженерних спеціальностей у частині нестандартних завдань ($p < 0,001$).

3) Компетентісне навчання перетворює базові математичні дисципліни на STEM-навчання забезпечуючи міст між абстрактними теоремами та прикладними задачами високого рівня.

Список використаних джерел:

1. Давидов В. В. Теорія розвивального навчання: ІНТОР, 1996. 544 с.
2. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. Е., Рівест Р. Л., Штайн К. Алгоритми: побудова та аналіз. 3-тє вид. Москва: Вільямс, 2013. 1328 с.
3. Фелер В. Вступ до теорії ймовірностей та її застосувань. Т. 1: Мир, 1984. 528 с.
4. OECD. PISA 2022 Results: The State of Learning and Equity in Education. Paris: OECD Publishing, 2023. Vol. I. 390 p.
5. Polya G. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 1957. 253 p.
6. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976. 342 p.

ІНТЕГРАЦІЯ KEYС-МЕТОДІВ У НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ: МОЖЛИВОСТІ ТА ВИКЛИКИ

Неженцева Надія Михайлівна

Email: niezhentseva.nadia@gmail.com

Науковий керівник: Аршавна О.О.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Інтерактивні методи навчання в сучасній педагогічній науці реалізують перехід від пасивного до активного навчання, розвивають м'які навички, підтримують мотивацію та увагу на уроках математики. Останнім часом вони є важливою частиною освітньої діяльності вчителів НУШ. Серед великої кількості інтерактивних методів можна виокремити кейс-метод. Як зазначено в роботі [2], «суть його полягає в тому, що тим, хто навчається, пропонують осмислити реальну життєву ситуацію, опис якої одночасно відображає не тільки яку-небудь практичну проблему, але і актуалізує визначений комплекс знань, який необхідно засвоїти при розв'язанні даної проблеми».

Метод кейсів має понад столітню історію розвитку й зараз активно застосовується в провідних установах світу. Як зазначається у матеріалах

офіційного сайту Harvard Business School, цей метод передбачає активну участь здобувачів освіти, які «встають на місце» учасників кейсу та самостійно визначають шляхи його розв'язання [3].

Кейс-метод передбачає використання практико-орієнтованих ситуацій (кейсів). Вони повинні моделювати реальні або наближені до реальності проблеми. Важливим елементом кейсів є вступна частина, де подаються необхідні теоретичні відомості, пояснюються нові поняття та загалом вводять учнів в контекст ситуації. Далі ставляться декілька взаємопов'язаних запитань, у яких відповідь на попереднє запитання допомагає перейти до наступного етапу розв'язку.

Згідно з дослідженням, представленим у статті Постової С.А. [1] та ін. кейс-метод має значний потенціал при навчанні математики та інформатики, «адже сприяє інтеграції теоретичних знань із практичними завданнями». Також було зазначено, що для більшої ефективності під час впровадження методу варто підключати цифрові платформи такі як: Google Classroom, Padlet, Moodle.

Загалом можна виділити наступні можливості цього методу:

1. Застосування знань у практичних ситуаціях. Це актуальне питання, яке особливо гостро впливає на уроках математики. У здобувачів знижується мотивація щось вчити, коли не зрозуміло, де ці знання потім можна використати. Тому важливо підтримувати їх інтерес до навчання.
2. Робота з кейсами передбачає формування алгоритмічного мислення.
3. Розвиток математичного моделювання.
4. Формування міжпредметних зв'язків.
5. Програмний матеріал поєднується з розвитком загальної ерудиції здобувачів освіти.
6. Можливість проведення роботи як аудиторно, тобто разом з вчителем в класі, так і позааудиторно, наприклад, як домашня робота для самостійного опрацювання.
7. Покращення вміння вглиблюватися в сутність проблеми та адаптувати свої знання під практичну проблему.
8. Стимулювання виникнення дискусій, що підвищує динамічність уроку та активізує пізнавальну діяльність та зацікавленість (у випадку аудиторної форми роботи).
9. Розвиток аналітичного та критичного мислення.

Незважаючи на широкі можливості застосування кейс-методу його ефективність використання на уроках визначається не лише розумінням сутності цього підходу, а передусім умінням доцільно та методично інтегрувати його в

освітній процес. Розглянемо виклики, з якими може стикнутися вчитель під час впровадження кейсів в урок:

1. Складність розробки якісних кейсів для конкретної теми.
2. Кейс повинен відповідати принципу доступності та враховувати рівень підготовки здобувачів освіти.
3. Для проведення уроку з обговоренням кейсу потрібно більше часу, ніж при розв'язуванні звичайної задачі, тому виникає проблема обмеженості навчального часу.
4. Під час роботи не всі здобувачі можуть бути залучені в обговорення.
5. Оскільки кейс-метод орієнтований на групову роботу, виникає складність оцінювання результатів.

Отже, інтеграція кейс-методу в навчання математики та інформатики відкриває широкі можливості для розвитку ключових та предметних компетентностей здобувачів освіти. Водночас потребує врахування низки методично-організаційних моментів, які варто враховувати під час розробки уроків із кейсами, бо задача сучасного вчителя не тільки використати якомога більше інтерактивних методів, а й влучно адаптувати їх під тему уроку та зробити їх дієвим інструментом для розширення та закріплення знань здобувачів освіти.

Список використаних джерел

1. Посто́ва С., Опа́насюк Н., Опа́насюк А. Кейс-метод у цифровому освітньому середовищі: виклики та можливості. Наукові праці Міжрегіональної Академії управління персоналом. Педагогічні науки. 2025. №1 (64). С.18–24.
2. Сисоєва С. О. Інтерактивні технології навчання дорослих: навч.-метод. посібник. Київ: НАНП України, 2011. 324 с.
3. Case method 100 years. URL: <https://www.hbs.edu/case-method-100> (дата звернення: 15.04.2026).

ІНТЕГРАЦІЯ STEM-ПІДХОДУ ДО ВИВЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ПРОФІЛЬНІЙ СЕРЕДНІЙ ОСВІТІ

Єрьоменко Т.Ю.

E-mail: tanyer0810@gmail.com

Науковий керівник: Жовтоніжко І.М.

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Сучасна профільна середня освіта орієнтується не лише на засвоєння теоретичних знань, а й на формування в учнів здатності застосовувати їх у

міждисциплінарному контексті. Саме тому інтеграція STEM-підходу до вивчення комплексних чисел набуває особливого значення. Такий підхід дозволяє подолати традиційне сприйняття комплексних чисел як абстрактної та відірваної від практики теми, перетворюючи її на інструмент для дослідження реальних процесів.

Навчання комплексних чисел у профільних класах варто здійснювати на основі інтеграції математичних знань і цифрових інструментів. Одним із ключових інструментів STEM-уроку є використання електронних таблиць і програм динамічної математики для візуалізації комплексних чисел на комплексній площині. Завдяки цьому здобувачі середньої освіти не лише виконують обчислення, а й досліджують геометричний зміст понять: модуля, аргументу, тригонометричної та показникової форм запису комплексних чисел.

Використання цифрових інструментів дає можливість: автоматизувати обчислення модулів, аргументів і операцій над комплексними числами за допомогою вбудованих функцій; будувати динамічні моделі на комплексній площині, де кожне число інтерпретується як точка або вектор; досліджувати перетворення (обертання, масштабування), що безпосередньо пов'язує, зокрема, алгебру з геометрією та фізикою.

Інтеграція STEM-підходу також передбачає залучення здобувачів до аналізу даних і моделювання. Наприклад, під час вивчення коренів многочленів можна працювати з великими наборами значень, використовуючи зведені таблиці для виявлення закономірностей розміщення коренів на комплексній площині. Це сприяє, зокрема формуванню навичок статистичного аналізу та інтерпретації даних; розвитку критичного мислення через пошук закономірностей і «точок розриву» функцій; усвідомленню зв'язку між алгебраїчними та геометричними властивостями математичних об'єктів.

Крім того, STEM-орієнтоване навчання дає змогу продемонструвати прикладне значення комплексних чисел, а також підвищує мотивацію учнів профільних класів, оскільки вони починають усвідомлювати практичну цінність математичних знань.

З власного досвіду роботи можна стверджувати, що ефективним інструментом для вивчення комплексних чисел є візуальні конспекти (рис. 1). Така форма подання навчального матеріалу істотно полегшує засвоєння абстрактних понять. Адже завдяки образним асоціаціям і метафорам учні глибше усвідомлюють природу «уявної одиниці» та особливості виконання арифметичних операцій із нею.



Рис.1. Візуальний конспект

Таким чином, інтеграція STEM-підходу до вивчення комплексних чисел у профільній середній освіті забезпечує не лише глибше розуміння абстрактних понять, а й формування у здобувачів середньої освіти таких ключових компетентностей як цифрова грамотність, аналітичне та критичного мислення, здатність до міждисциплінарного застосування знань тощо.

Список використаних джерел:

1. Морзе Н.В., Гладун М.А., Дзюба С.М. STEM-освіта: проблеми та перспективи впровадження. Інформаційні технології і засоби навчання. 2018. Т. 66, № 4. С. 10-23.
2. Коваленко А.М. Комплексні числа та їх вивчення у профільній школі : кваліфікац. робота на здобуття освіт. ступеня магістр : спец. 014 Середня освіта (Математика) / А.М. Коваленко ; Харків. нац. пед. ун-т ім. Г.С. Сковороди, каф. математики. – Харків, 2022. – 102 с.

ІНТЕРАКТИВНІ НАВЧАЛЬНІ РЕСУРСИ: ДОСВІД РОЗРОБКИ ТА ВИКОРИСТАННЯ

Зарецька Ірина Тимофіївна

E-mail:zaretskaya@karazin.ua

Владимирова Марина Володимирівна

E-mail: vladymyrova@gmail.com

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Кафедра теоретичної та прикладної інформатики Харківського національного університету вже понад 15 років працює з видавництвом «Ранок». За ці роки було написано багато підручників з інформатики для 2, 3, 4, 5 та 6 класів авторами Корнієнко М. М., Крамаровська С. М., Зарецька І. Т. а також після зміни програми навчання ще й підручники з предмету «Я досліджую світ» тих же авторів [1]. Всі ці підручники отримали гриф МОН України та

використовуються у школах України. Є навіть переклади на угорську, польську та румунську мови для учнів спільнот, які живуть та навчаються на території України.

З 2013 року обов'язковою вимогою до грифування підручників в МОН України стала наявність Інтернет підтримки навчання. Починаючи з цього року на кафедрі розроблюються інтерактивні завдання до кожного параграфу кожного підручника та допоміжні завдання для розвитку логіки та творчого мислення. Якщо просто підрахувати, що в середньому підручник складається з 30 параграфів, до кожного параграфу розроблюється 10 завдань за чотирма рубриками (Навчаємось, Тренуємось, Закріплюємо, Логічні завдання), та ще й Словничок і Цікавинка до цього параграфу, то для 7 виданих на даний час підручників було розроблено за цей час понад 2 тисячі інтерактивних завдань. З урахуванням змін до програми навчання, переходу до концепції Нової Української Школи та перевидання підручників, що відповідають новій програмі, а також переходу на нову технологію розробки кількість розроблених завдань досягає 4 тисяч. За відгуками вчителів учням дуже подобається працювати з такими завданнями, а вчителям це суттєво полегшує викладання та закріплення матеріалу (рис.1).

Крім підтримки базових підручників за останні роки було розроблено модуль інтерактивних логічних завдань, який включає в себе завдання для роботи з латинськими та магічними квадратами, арифметичними килимками, різними типами ребусів тощо (рис.2).

Особливо слід відмітити Конструктор алгоритмів, який було розроблено як окремий застосунок для підтримки вивчення основ алгоритмізації. За допомогою цього за стосунку учні можуть тренуватися в складанні алгоритмів у вигляді блок-схем, виконувати або трасувати такі алгоритми, досліджувати їх поведінку на різних наборах даних та навіть зберігати у файлі для подальшого редагування та опрацювання. Є також версія для вчителя, де він може додавати, редагувати та видаляти алгоритми, задавати правильні рішення у вигляді блок-схем та зберігати їх для подальшого використання учнями (рис.3).

Всі розроблені інтерактивні матеріали розміщено на сайті видавництва «Ранок» [2], вони є доступними для широкого використання. Було проведено та проводиться багато вебінарів та семінарів для вчителів щодо користування цими продуктами.



Рис.1: Приклади інтерактивних завдань для підручника 4 класу

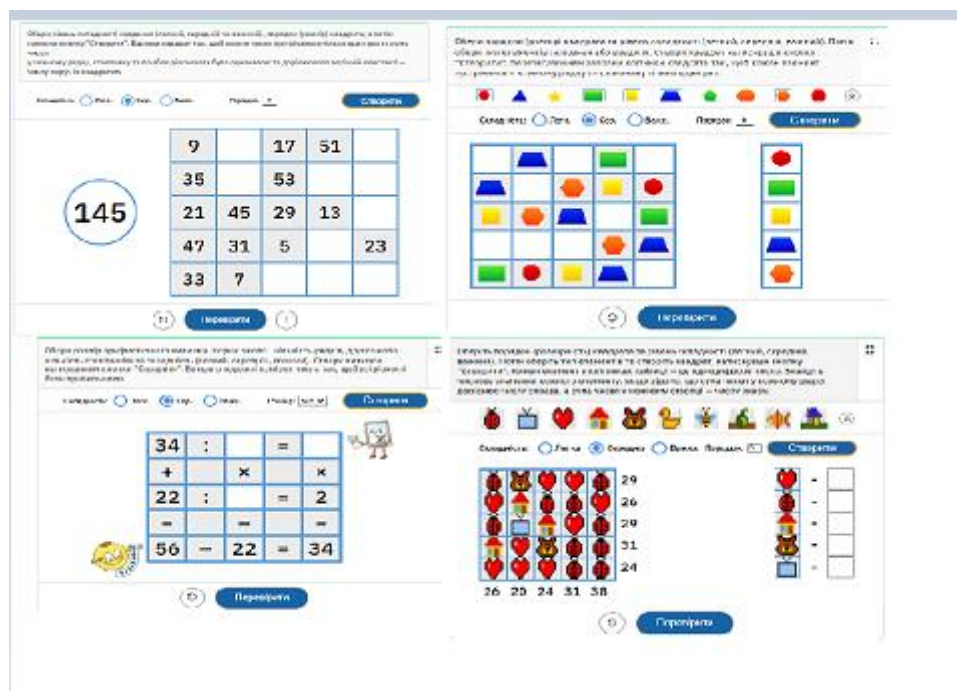


Рис.2: Приклади інтерактивних логічних завдань

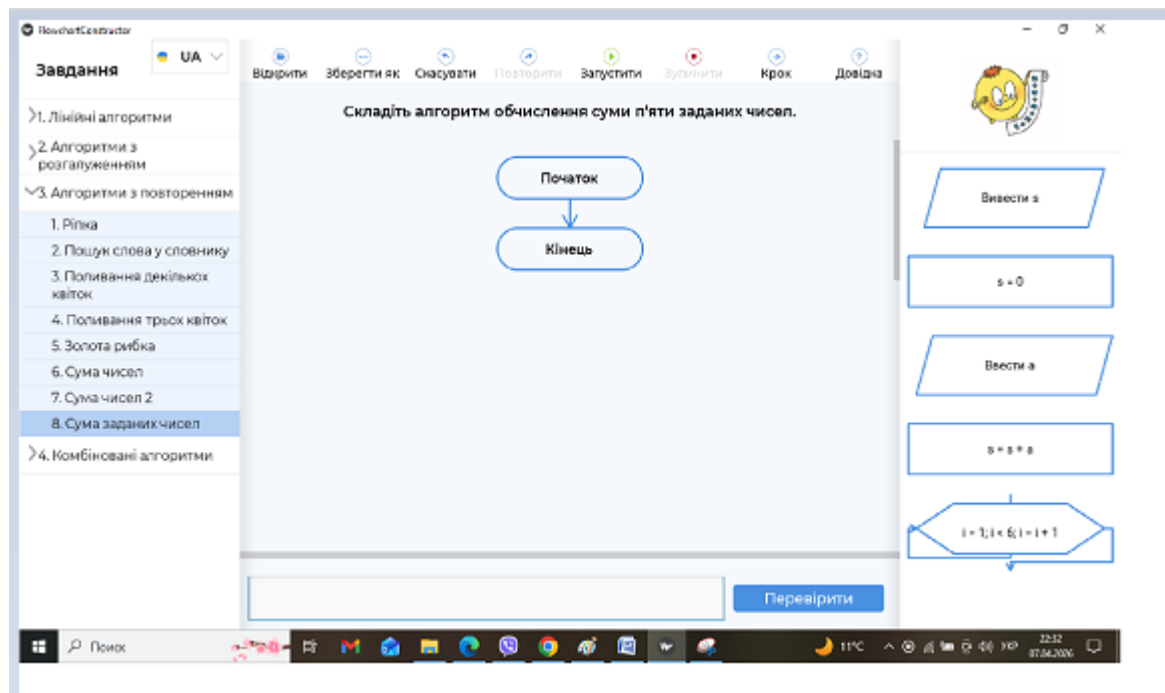


Рис.3: Екран конструктора алгоритмів, модуль учня

Щодо використовуваних технологій. До 2020 року всі завдання розроблювались за допомогою Flash технології, вони коректно відкривалися у застосунку Flash Player або у будь-якому браузері на будь якому пристрої. Після припинення підтримки цієї технології видавництво «Ранок» купило платформу хорватських розробників IZZI, яка дозволяє розроблювати завдання за шаблонами або використовувати для розробки завдань власний код на HTML та JavaScript. Всі логічні завдання розроблювалися з використанням HTML та JavaScript та вбудовувалися в платформу. На жаль платформа не надає можливості відображати коректно самостійно запрограмовані завдання на всіх мобільних пристроях, тож приходиться докладати для цього додаткових зусиль.

Архітектура IZZI складається із трьох частин: клієнтської, проксі-сервера та основного сервера. Проксі-сервер належить видавництву «РАНОК» та здійснює функцію захисника даних користувачів: не передає їх до основного серверу, забезпечуючи безпечний доступ користувача до основного сервера. Така архітектура обумовлена прагненням зберегти дані українських користувачів у межах країни, не допускаючи їх витік за межі країни.

Отже, не зважаючи на зміни технологій та програм навчання, кафедра продовжує співпрацю з видавництвом «Ранок» як у написанні нових версій підручників, так й в розробці нових інтерактивних завдань для підтримки навчання. Вчителі та учні дуже цінують таку підтримку, автори неодноразово отримували подяку за такий корисний та цікавий інструмент навчання та розвитку учнів.

Список використаних джерел:

1. Корнієнко М. М., Крамаровська С. М., Зарецька І. Т. Сходинки до інформатики. Підручник для 2 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків, Видавництво «Ранок», 2013р., с. 32-176
2. Інтерактивне навчання. Видавництво ранок
URL:<https://interactive.ranok.com.ua/> (Дата звернення: 15.04.2026)

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПРОФІЛЬНИХ ЕКОНОМІЧНИХ КЛАСІВ

Світлана Іванко

E-mail: svitlana.ivanko@student.karazin.ua

Науковий керівник: Вельма Світлана Володимирівна

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

У сучасних умовах реформування шкільної математичної освіти особливої актуальності набуває проблема розвитку математичної компетентності учнів профільної школи, зокрема економічного спрямування. Компетентнісний підхід передбачає не лише засвоєння математичних знань, а й формування здатності застосовувати їх для розв'язування практично орієнтованих завдань, що моделюють реальні процеси професійної діяльності.

Ефективним інструментом розвитку математичної компетентності учнів профільних економічних класів виступає застосування математичного моделювання економічних процесів. Інтеграція економічно спрямованих задач у процес навчання математики забезпечує формування в учнів умінь здійснювати аналітичну діяльність, розвивати логічне мислення, конструювати математичні моделі реальних ситуацій та здійснювати змістову інтерпретацію отриманих результатів.

Особливий дидактичний потенціал у цьому контексті мають задачі оптимізаційного характеру, зокрема транспортні задачі, які відображають процес мінімізації витрат на перевезення продукції від постачальників до споживачів за наявності певних обмежень. Розв'язування таких задач дозволяє інтегрувати знання з алгебри, елементів математичного аналізу, логіки та економіки. Крім того, використання подібних задач сприяє активізації пізнавальної діяльності учнів, оскільки транспортні задачі характеризуються сучасною спрямованістю, практичною значущістю та виходять за межі традиційного змісту шкільного курсу математики.

У межах профільного навчання учням може бути запропонована задача, що передбачає оптимальний розподіл товару між складами та торговельними точками з метою мінімізації транспортних витрат. На початковому етапі учні здійснюють змістовий аналіз умови задачі, у процесі якого виокремлюють основні економічні характеристики, визначають змінні (обсяги перевезень), параметри (запаси продукції на складах, потреби споживачів, вартість транспортування) та формулюють систему обмежень, що відображає баланс між пропозицією і попитом. Наступним кроком є побудова математичної моделі у формалізованому вигляді, зокрема у формі таблиці перевезень, яка забезпечує структуроване подання вихідних даних і взаємозв'язків між ними.

Наступний етап передбачає знаходження учнями допустимого та оптимального плану перевезень із використанням відповідних методів розв'язування транспортних задач. Водночас важливого значення набуває не лише алгоритмічний аспект розв'язування, але й інтерпретація отриманих результатів. Учні здійснюють економічний аналіз оптимального плану, оцінюють ефективність використання ресурсів, визначають мінімальну сукупну вартість перевезень та обґрунтовують доцільність прийнятого рішення.

Залучення транспортних задач до навчального процесу сприяє формуванню в учнів умінь:

1. здійснювати аналіз прикладної ситуації та виокремлювати суттєві параметри;
2. будувати математичну модель економічного процесу;
3. застосовувати математичний апарат для розв'язування прикладних задач;
4. інтерпретувати результати розрахунків у практичному контексті;
5. оцінювати ефективність прийнятих рішень.

Отже, використання математичного моделювання економічних процесів, зокрема транспортних задач, у навчанні математики учнів профільних економічних класів сприяє розвитку їхньої математичної компетентності, підвищенню мотивації до вивчення предмета та формуванню готовності до застосування математичних знань у майбутній професійній діяльності. Перспективу подальших досліджень вбачаємо в розробці системи економіко-математичних задач для профільної школи та методики їх інтеграції в навчальний процес.

Список використаних джерел:

1. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.
2. Катеринюк Г. Д. Здатність до математичного моделювання як ознака

математичної компетентності учнів. Моделювання у навчальному процесі: матеріали Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. (03-04 березня 2017 р.) / укладач Н.А. Головіна Луцьк: Вежа-Друк, 2017. С. 70-73.

3. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект : монографія / І. В. Лов'янова. Черкаси : Видавець Чабаненко Ю.А., 2014. 354 с. <https://doi.org/10.31812/0564/2241> (Дата звернення 19.03.2026)

РІВНЯННЯ, ЩО МІСТЯТЬ НСД ТА НСК НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ

Кузнецов В.А.

E-mail: volodymyrkuznetsov121@gmail.com

Науковий керівник: Боднарук С.Б.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Вивчення властивостей найбільшого спільного дільника (НСД) та найменшого спільного кратного (НСК) є фундаментальною частиною шкільного курсу математики у 5-6 класах. Однак у межах стандартної програми розгляд цих понять часто обмежується простими алгоритмами обчислення НСД та НСК, а також використанням для скорочення звичайних дробів, зведенням кількох звичайних дробів до спільного знаменника тощо.

Актуальність даної теми для факультативних занять зумовлена тим, що задачі на НСД та НСК є «класикою» математичних олімпіад, в яких інколи зустрічаються і рівняння та їх системи, що містять НСД та НСК.

Наведемо кілька прикладів задач.

Задача 1. Розв'язати в натуральних числах рівняння $x + y^{10} = НСК(x; y)$ [1].

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь в натуральних числах $\{ab = 720, НСД(a; b) = 4\}$ [2].

Вивчення даної теми на факультативних заняттях сприятиме системному формуванню в учнів математичної та дослідницької компетентностей, закладаючи підґрунтя для аналітичного мислення та самостійного наукового пошуку. З методичної точки зору, рівняння, що містять ці функції, дозволять учням глибше зрозуміти структуру цілих чисел, опанувати багато цікавих методів розв'язання рівнянь (зокрема, метод логічного перебору, відшукування розв'язку у певному вигляді, метод введення числового параметра).

1. Розглянемо рівняння виду $НСД(f(x), g(x)) = h(x)$, де f, g, h – деякі функції, залежні від x .

1.1. Нехай $g(x) = b$ та $h(x) = c \neq 0$ – сталі, що виражені цілими числами. Рівняння $НСД(f(x), b) = c$ має розв'язки, коли $f(x) : c$ і $b : c$. Нехай $b : c$. Існує таке $k \in \mathbb{Z}$, що $f(x) = kc$. Якщо f є оборотною, то $x = f^{-1}(kc)$.

Задача 3. Розв'язати рівняння $НСД(3x - 1; 15) = 5$.

Розв'язання. В даному випадку $c = 5$; $f(x) = 3x - 1$; $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$. Отже, $x = \frac{5k+1}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Зауважимо, що k не кратне 3, бо інакше $НСД(3x - 1; 15) > 5$.

Задача 4. Розв'язати рівняння $НСД(36; x^2) = 9$.

Розв'язання. В цьому випадку $c = 9$; $f(x) = x^2$. Отже, $f(x) = kc$, $k \in \mathbb{Z}$.

Звідки випливає, що $x^2 = 9k$, тобто $x = \pm 3\sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, k не кратне 3.

1.2. Нехай f та g – многочлени, $h(x) = c \neq 0$. Тоді з алгоритму Евкліда випливає наступний алгоритм розв'язання рівняння такого виду:

- 1) ділимо многочлен більшого (чи такого ж) степеня на многочлен меншого;
- 2) заміняємо в рівнянні многочлен, який ділили, на остачу від ділення;
- 3) повторюємо, поки один із многочленів не стане числом $K \in \mathbb{Z}$;
- 4) розв'язуємо отримане рівняння $НСД(K; P(x)) = c$, де $P(x)$ – многочлен, що було отримано в результаті ділення.

Задача 5. Розв'язати рівняння $НСД(x^2 + x; x^3 + 11) = 10$.

Розв'язання. $x^3 + 11 = x(x^2 + x) + (-x^2 + 11)$, тому згідно властивостей НСД рівняння можна записати так $НСД(x^2 + x; -x^2 + 11) = 10$. Повторивши ту саму процедуру ще кілька разів, матимемо: $НСД(x + 11; -x^2 + 11) = 10$; $НСД(x + 11; 11x + 11) = 10$; $НСД(x + 11; -110) = 10$. З пункту 1.1: $x = 10k - 11$, $k \in \mathbb{Z}$, k не кратне 11, бо інакше $НСД(x^2 + x; x^3 + 11) > 10$.

1.3. Нехай f , g та h – довільні функції.

Для того, щоб рівняння $НСД(f(x), g(x)) = h(x)$ мало розв'язки необхідно, щоб $f(x) : h(x)$ і $g(x) : h(x)$. Тоді існують $a, b \in \mathbb{Z}$, що $\{f(x) = ah(x), g(x) = bh(x)\}$.

Виконаємо додавання двох рівнянь системи: $f(x) + g(x) = (a + b)h(x)$. Позначимо $a + b = k \in \mathbb{Z}$. Тоді задача зводиться до відшукування такого значення параметра k за якого рівняння $f(x) + g(x) = kh(x)$ має цілочисельні розв'язки.

Задача 6. Розв'язати рівняння $НСД(|x - 3|(x^2 + 1); \sqrt{x + 6}) = \sqrt{x + 6}$.

Розв'язання. Згідно теорії, описаній вище, існує $k \in \mathbb{Z}$, що

$|x - 3|(x^2 + 1) + \sqrt{x + 6} = k\sqrt{x + 6}$. Перепишемо рівняння у вигляді: $|x - 3|(x^2 + 1) = \sqrt{x + 6}(k - 1)$. Будемо шукати розв'язок у вигляді $x = a^2 - 6$. Тоді рівняння матиме вигляд: $|a^2 - 9|((a^2 - 6)^2 + 1) = |a|(k - 1)$, $k \geq 1$.

Легко бачити, що $|a^2 - 9|((a^2 - 6)^2 + 1) : |a|$, якщо $a \neq 0$.

$|a^2 - 9|((a^2 - 6)^2 + 1) \equiv 0|a|$. Тоді $|0 - 9|((0 - 6)^2 + 1) \equiv 0|a|$. $333 \equiv 0|a|$. Це означає, що $a = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 37; \pm 111; \pm 333\}$. Якщо $a = 0$, то $x = -6$. Тоді $x = \{-6; -5; 3; 75; 1363; 12315; 110883\}$.

Задача 7. Розв'язати рівняння $НСД(5^x; (x)!) = 125$.

Розв'язання. Аналогічно до минулої задачі, існує $k \in Z$, що $5^x + (x)! = 125k$. Будемо шукати розв'язок у вигляді $x = 2^n$, $n \in N$.

Тоді рівняння набуде вигляду $5^{2^n} + n! = 125k$. Помітимо, що $x \geq 3$ (бо тоді $5^x : 125$). Тоді $2^n \geq 3$ з чого випливає, що мінімальне значення $n = 2$; $n! : 125$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots$ звідки $n = 15 + s$, $s \in N \cup \{0\}$. Проте розв'язки будуть лише при $s = 0; 1; 2; 3; 4$, бо при $s > 4$ $НСД(5^{2^{15+s}}; (2^{15+s})!) > 125$.

Отже, розв'язками рівняння є $x = 2^{15}$, $x = 2^{16}$, $x = 2^{17}$, $x = 2^{18}$, $x = 2^{19}$.

2. Розглянемо рівняння виду $НСК(f(x), g(x)) = h(x)$, де f, g, h – деякі функції, залежні від x . Користуючись властивістю $НСД(f, g) \cdot НСК(f, g) = f \cdot g$, легко перейти до рівняння $НСД(f(x), g(x)) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$ алгоритм розв'язання якого відомий з пункту 1.3.

Задача 8. Розв'язати рівняння $НСК(\frac{1}{x}; \frac{1}{x}) = \frac{2}{2x}$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$НСД(\frac{1}{x}; \frac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{2}{2x}}. \text{ Спростивши праву частину, матимемо } НСК(\frac{1}{x}; \frac{1}{x}) = 2.$$

Тоді існує $k \in Z$, що $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 2k$. Отримане рівняння рівносильне системі $\{x + x = 2kx, x \neq 0, x \neq 0\}$. Звідки маємо, що $\frac{1}{2}k2x = 1$. Тобто $2x = \frac{2}{k}$. При $k >$

0 : $\sin \sin 2x = \pm \sqrt{\frac{2}{k}}$, $-1 \leq \pm \sqrt{\frac{2}{k}} \leq 1$. Тоді $x = \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{2}{k}} \right) +$

$\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z, k \in Z, k \geq 2$. Але $\frac{1}{x}$ та $\frac{1}{x}$ є цілими числами лише при $k = 2$. Таким чином остаточною відповіддю є

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

3. Розглянемо рівняння виду $НСД(f(x), g(x)) = НСК(p(x), q(x))$, де f, g – деякі функції, p, q – многочлени. Таке рівняння зручно розв'язувати за допомогою побудови лінійного зображення найбільшого спільного дільника через дані многочлени (тотожність Безу): існують многочлени $u(x)$ та $v(x)$, що $НСД(p(x), q(x)) = p(x)u(x) + q(x)v(x)$. Тоді початкове рівняння можна записати у вигляді $НСД(f(x), g(x)) = p(x)u(x) + q(x)v(x)$. Алгоритм розв'язання даного рівняння відомий з пункту 1.3.

Задача 9. Розв'язати рівняння $НСД(2^x - 1; 2^{x+1} - 1) = НСД(x^2 + 1; x)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо лінійне зображення правої частини.

$$x^2 + 1 = x \cdot x + 1; 1 = (x^2 + 1) \cdot 1 + x \cdot (-x). \text{ Тоді, } u(x) = 1, v(x) = -x.$$

Початкове рівняння набуває вигляд $НСД(2^x - 1; 2^{x+1}) = x^2 \cdot 1 + x \cdot (-x)$;

$НСД(2^x - 1; 2^{x+1} - 1) = 1$. Існує $k \in \mathbb{Z}$, що $2^x - 1 + 2^{x+1} - 1 = k$. Дане рівняння рівносильне рівнянню $3 \cdot 2^x = k + 2$, а це рівняння має розв'язки при будь-якому $k > -2$. Отже, $x \in \mathbb{N}$ – розв'язки початкового рівняння.

Зауважимо, що за допомогою побудови лінійних комбінацій можна розв'язувати і рівняння, описані в пункті 1.2.

4. Розглянемо рівняння виду $НСД(f(x), g(x)) = НСД(p(x), q(x))$, де f, g, p, q – деякі функції.

Тоді $\{f(x) : НСД(p(x), q(x)), g(x) : НСД(p(x), q(x)), p(x) : НСД(f(x), g(x)), q(x) :$

$: НСД(f(x), g(x))$. Звідси випливає, що існують $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$: $\{f(x) = aНСД(p(x), q(x)), g(x) = bНСД(p(x), q(x)), p(x) = cНСД(f(x), g(x)), q(x) = dНСД(f(x), g(x))\}$;

$\Rightarrow \{(a + b)НСД(p(x), q(x)) = f(x) + g(x), (c + d)НСД(f(x), g(x)) = p(x) + q(x)\}; \Rightarrow \{p(x) + q(x) = \frac{f(x) + g(x)}{a + b}m, f(x) + g(x) = \frac{p(x) + q(x)}{c + d}n, \text{ де } m, n \in \mathbb{Z}.$

Позначимо $\frac{m}{a + b} = u, \frac{n}{c + d} = v$: $(f(x) + g(x))u = (p(x) + q(x))v$. Позначимо $\frac{v}{u} = k$. Тоді початкове рівняння зводиться до пошуку такого $k \in \mathbb{Q}$, щоб рівняння $f(x) + g(x) = (p(x) + q(x))k$ мало цілочисельні розв'язки.

Задача 10. Розв'язати рівняння $НСД(\sqrt{x} + 7; 5x) = НСД(x!; \frac{x+11}{5})$.

Розв'язання. З пункту 4 існує $k \in \mathbb{Q}$, що $\sqrt{x} + 7 + 5x = (x! + \frac{x+11}{5})k$.

Шуканий $x > 0$. Будемо шукати розв'язок у вигляді $x = 4^n, n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що при $n = 2m + 1$ $(4^n + 11) : 5$. Отже, рівняння можна записати у вигляді

$$2^n + 7 + 10n = \left((4^n)! + \frac{4^n + 11}{5}\right)k. \text{ Проведемо наступну оцінку.}$$

Помітимо, що $(4^n)! : \frac{4^n + 11}{5}$. Тоді $\left((4^n)! + \frac{4^n + 11}{5}\right)k = \frac{4^n + 11}{5}kl, l \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо відношення $R(n) = \frac{2^n + 7 + 10n}{\frac{4^n + 11}{5}}$. $R(1) = \frac{19}{3} \notin \mathbb{Z}$; $R(3) = 3$;

$R(5) = \frac{89}{207} \notin \mathbb{Z}$. Бачимо, що коли $n > 3$, то $R(n) < 1$. Отже, єдиний розв'язок при $n = 3$. Тоді $x = 64$.

Проведена класифікація та успішна апробація методів розв'язання рівнянь, що містять НСД та НСК підтверджують високу ефективність запропонованих алгоритмів, що робить дану тематику надзвичайно доцільною для впровадження на факультативних заняттях.

Список використаних джерел:

1. Hometask 11-mixed. URL: <https://surl.li/abptnh> (дата звернення: 16.04.2026).
2. Рокицький І. О. Збірник задач з теорії чисел : навч. посіб. для студ. ф-тів математики, фізики та інформатики. Вінниця: ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2016. 141 с. URL: <https://surl.lt/gjiwqv> (дата звернення: 16.04.2026).

СТОХАСТИКА ЯК ІНСТРУМЕНТ КРИТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ: СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ ЗДОБУВАЧІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Бочкарьова М. А.

E-mail: myroslava.bochkarova@student.karazin.ua

Науковий керівник: Чернова Г. В.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Сучасний інформаційний простір характеризується надмірною насиченістю даними, що часто подаються у формі статистичних показників, графіків та прогнозів. Для здобувачів загальної середньої освіти цифрового покоління здатність не лише оперувати формулами, а й критично оцінювати достовірність отриманої інформації стає життєво необхідною компетентністю, на розвиток якої направлена реформа Нової української школи (НУШ). У цьому контексті стохастика, як розділ математики, що вивчає випадкові події, є природним інструментом для критичного аналізу джерел. Тому стохастика стає не просто математичним розділом, а інструментом формування ключових компетентностей у НУШ [2].

Проблема ймовірно-статистичної освіти учнівства є актуальною, але не є новою в теорії та практиці шкільної математичної освіти. Вона має понад сторічну історію та над її розв'язанням працювали видатні вітчизняні та зарубіжні вчені такі, як: В. Буняковський, Б. Гнеденко, В. Єрмаков, В. Розумовський та ін. Проте в умовах сучасних інформаційних впливів виникає потреба переосмислити роль статистики не як суто розрахункової дисципліни, а як основу для грамотності в роботі з даними. Тому сучасна українська наукова школа продовжує вивчення стохастики (теорії ймовірностей, статистики та

комбінаторики) в контексті середньої освіти. Цьому питанню присвячують свої роботи такі педагоги-науковці, як: Д. Васильєва, М. Бурда, О. Істер, Г. Лиходєєва та ін. Як зазначає Д. Васильєва [1], стохастична лінія в НУШ має бути орієнтована на формування здатності здобувачів загальної середньої освіти розпізнавати маніпуляції в медіапросторі. Цю думку поділяє Г. Лиходєєва [4], акцентуючи увагу на важливості дослідницького підходу під час аналізу статистичних виборок.

Слід звернути увагу, що критичний аналіз джерела інформації через призму стохастики передбачає перевірку трьох основних аспектів:

1. репрезентативність вибірки: розуміння того, чи можна узагальнювати дані опитування 100 осіб на всю країну.
2. кореляція: здатність здобувача освіти розрізняти два явища, що відбуваються одночасно, від явищ, де одне є причиною іншого.
3. візуальна маніпуляція: аналіз візуальних помилок у представленні динаміки процесів [6].

Сучасні тенденції викладання стохастики в закладах загальної середньої освіти с зорієнтовані на розв'язання контекстних завдань, а не на сліпе запам'ятовування формул: це і аналіз реальних новинних заголовків, і застосування табличних процесорів для обробки великих масивів даних, що дозволяє зосередитися на розумінні результатів, а не на рутинних обчисленнях. До інструментарію засобів навчання входять дидактичні ігри та експерименти, живі спостереження та предметна діяльність здобувачів загальної середньої освіти, зокрема проєктна діяльність з теорії ймовірностей та математичної статистики.

З іншого боку, розуміння стохастики як інструменту критичного аналізу стикається з низкою практичних і методичних викликів. Часто здобувачі освіти сприймають статистичні дані як абсолютну істину в умовах цифрофізації освіти. Однак, існує ризик, що замість критичного аналізу здобувачі загальної середньої освіти просто формально підставлятимуть дані у готові формули. Тому здобувачам освіти пропонується створювати власні моделі прогнозування. Це дозволяє зрозуміти природу похибок. Виходячи з цього, класична ймовірна модель, що представлена формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість сприятливих подій, а n – загальна кількість випробувань, набуває нового змісту. Розуміння цієї простої формули у контексті простих стохастичних задач та соціальних опитувань дозволяє здобувачам освіти усвідомити поняття «статистичної значущості».

Отже, упровадження стохастичного аналізу в освітній процес дозволяє трансформувати вивчення математики з абстрактного процесу в практичний інструмент захисту від неправдивої інформації, а також формує у здобувачів освіти науковий світогляд, відповідальність громадянства, вміння критично оцінювати джерела інформації, що є важливими складовими формування ключових компетентностей здобувачів освіти.

Список використаних джерел:

1. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Особливості навчання математики в умовах воєнного стану (методичні рекомендації). *Математика в рідній школі*. 2022. № 4. С. 6-15.
2. Васильєва Д. В. Методика навчання математики в основній школі: досвід НУШ. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2023. 176 с.
3. Істер О. С. Математика: теорія ймовірностей та статистика в школі. Київ : Генеза, 2022. 120 с.
4. Лиходєєва Г. В. Дослідницький підхід у навчанні учнів елементів стохастики з використанням інформаційних технологій [Електронний ресурс]. URL: <https://enpuirb.udu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/2c92773a-e81c-4078-b842-5c21e5303f88/content> (дата звернення: 12.04.2026)
5. GeoGebra для навчання статистики та ймовірності. [Офіційний сайт]. URL: <https://www.geogebra.org/> (дата звернення: 10.04.2026)
6. Louie J. Critical data literacy: Creating a more just world with data. *Semantic Scholar*, 2022. [Електронний ресурс]. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Critical-data-literacy..> (дата звернення: 02.04.2026)
7. Dataspire. Critical Data Literacy: What Is It and Why Should It Be Part of Our Classrooms in 2026? [Електронний ресурс]. URL: <https://www.dataspire.org/blog/Critical-Data-Literacy-2026> (дата звернення: 12.04.2026)

ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ 5-Х КЛАСІВ ЗАСОБАМИ ЦИФРОВОГО МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Сергійко Дар'я Миколаївна

E-mail: 21fmf.d.serhiiko@std.npu.edu.ua

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Сучасний етап розвитку математичної освіти характеризується зміщенням акцентів від відтворення готових знань до формування здатності учня діяти в умовах невизначеності, досліджувати та інтерпретувати результати власної

діяльності. Особливої уваги у такому напрямку потребує процес вивчення геометрії, оскільки у цьому розділі математики традиційна методика часто обмежується демонстрацією готових моделей та повідомленням властивостей фігур без достатнього рівня їх осмислення. Як наслідок геометричні залежності між різними об'єктами та фактами сприймаються на рівні заучування, а просторові уявлення учнів формуються лише фрагментарно.

У цьому контексті технічний прогрес може суттєво сприяти поліпшенню ситуації, адже звернення до цифрового моделювання як засобу організації навчально-дослідницької діяльності учнів є корисним навіть на пропедевтичному рівні, зокрема у 5 класі. Водночас принципово важливо розуміти, що йдеться не про навчання програмування, а про використання цифрового середовища як інструмента, що дозволяє зробити геометричні об'єкти динамічними та відкритими для дослідження.

Розділ «Геометричні тіла. Об'ємні геометричні фігури» зазвичай досить складно сприймається п'ятикласниками внаслідок їх психолого-педагогічних особливостей: у цьому віці ще суттєвою є перевага наочно-образного мислення, тому будь-яка абстракція потребує опори саме на візуальний досвід. Водночас саме в цей період формується здатність до елементарного узагальнення, що створює передумови для переходу від спостереження до первинного аналізу. І саме тому структура вивчення даного розділу для кращого розуміння має будуватися як послідовність керованих відкриттів, у яких учень не одразу отримує готову формулу, а має можливість самостійно вивести її на основі взаємодії з відповідною моделлю.

Цифрове моделювання у такому випадку стає зручним засобом організації такої взаємодії. За допомогою досить простого коду у мові програмування Python будь-яке геометричне тіло з цього розділу – куб, прямокутний паралелепіпед, призма, піраміда – можна подати не як статичні зображення, а як об'єкти зі змінними параметрами. Зміна довільного виміру геометричного тіла максимум в один клік супроводжується відповідною візуальною реакцією моделі, що дозволяє учневі встановлювати залежності між величинами інтуїтивно, ще до їх формального опису. У ході такого процесу закладається поступове руйнування старого стереотипу: геометрія – це зовсім не набір правил, які легше заучити, а цілком логічна структура взаємопов'язаних величин.

Методична доцільність такого підходу полягає в тому, що він забезпечує природний перехід від спостереження до основ елементарного дослідження. Учень отримує можливість ставити запитання типу «що зміниться, якщо...», одразу ж самостійно перевіряти власні гіпотези і фіксувати результати. Саме ці дії фактично і становлять основу дослідницьких умінь. І при цьому важливим є

те, що вони виникають не як якась вимушена окрема діяльність, а як органічна частина навчального процесу.

Проте, як і будь-який інший засіб, що використовується в освітньому процесі, важливим аспектом для якнайвищої ефективності є доцільність його використання та спосіб впровадження. Передусім, подібна цифрова адаптація не повинна підміняти собою пояснення вчителя або перетворюватися на просто демонстраційний інструмент пасивного спостереження. Навпаки, саме модель має стати об'єктом активної взаємодії та комунікації – і це може бути як індивідуальна робота, так і групова, у ході якої учні дискутують, змінюють параметри, порівнюють результати, роблять власні висновки. Роль учителя вже на цьому етапі переходить у позицію наставника та організатора пізнавальної діяльності, який може своїми запитаннями спрямувати мислення учнів у необхідне русло.

Суттєвим є також і принцип поступового ускладнення. На початковому етапі достатньо, щоб учень встановлював прості залежності між величинами на рівні спостереження. Надалі учні зможуть отримати і повноцінне словесне формулювання, а ще через кілька років – і елементи символічного запису. Така послідовність дозволяє уникнути формалізму і забезпечує більш природне розуміння матеріалу.

Також варто зауважити, що за такої форми організації уроку у 5 класі особливого значення набуває рефлексія наприкінці. Після виконання дослідницьких дій треба дати дітям можливість обговорити отримані результати, поділитися власними враженнями та сформулювати узагальнення. Саме на цьому етапі відбувається перехід від отримання індивідуально-групового досвіду до колективного знання, що має бути закріплене у вигляді математичних тверджень.

Запропонований підхід до вивчення стереометричних тем створює якісну основу для подальшого розвитку навчальної діяльності в курсі середньої та старшої шкіл. Учні, які звикли працювати з моделями як з об'єктами дослідження, легше переходять до більш складних форм діяльності, зокрема до абстрактного аналізу на основі своїх уявлень, подальшого самостійного створення моделей та написання власного програмного коду для створення подібних симуляцій. Таким чином, пропедевтичний етап у курсі п'ятого класу виконуватиме не лише функцію ознайомлення з геометричними тілами, а й закладатиме ґрунтовний фундамент для багатьох аспектів: дослідницького стилю мислення, інтеграції програмування та математичного апарату, уміння правильно аналізувати та відтворювати в уяві стереометричні моделі тощо.

Отже, використання цифрового моделювання у вивченні геометрії у 5 класі є методично доцільним за умови його орієнтації на активну пізнавальну діяльність учнів, врахування їх вікових особливостей та забезпечення поступового переходу від наочно-образного мислення до перших основ аналітичного бачення. Такий підхід дозволяє зробити навчання не лише більш наочним, а й змістовно глибшим, таким чином залучаючи учнів до подальшого самостійного пізнання математичних закономірностей.

Список використаних джерел:

1. Державний стандарт базової середньої освіти. Київ, 2020. 18 с.
2. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: збірник наукових праць. Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, випуск 7, 2003. – с. 3–16.
3. Литвинова С.Г., Дементієвська Н.П., Слободяник О.В., Соколюк О.М., Пінчук О.П., Гриб'юк О.О. Методика використання комп'ютерного моделювання для формування компетентностей учнів з природничо-математичних предметів. Київ: Педагогічна думка, 2020. 73с.

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛА ЧЕРЕЗ МЕТОД ВИЧЕРПАННЯ І МЕТОД НЕПОДІЛЬНИХ

Дорошенко Д.Є.

Email: doroshenkode@365.dnu.edu.ua

Науковий керівник: Біліченко Р.О.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Поняття інтеграла є одним із найскладніших для засвоєння в курсі алгебри старшої школи, адже воно пов'язане з ідеями нескінченності, границі та неперервності. Зазвичай, учні сприймають означення інтеграла досить формально, не розуміючи самого його змісту. Тому важливим є пошук таких підходів, які дозволяють сформувати інтуїтивне уявлення про інтеграл ще до введення строгих означень.

У цьому контексті особливого значення набувають історичні методи – метод вичерпання Архімеда та метод неподільних Кавальєрі [1, с.126-127]. Вони дають змогу природно підвести учнів до розуміння інтеграла як процесу накопичення величини.

Метод вичерпання спирається на ідею поступового наближення площі або об'єму шляхом розбиття фігури на простіші частини. У навчанні цей підхід доцільно реалізувати через задачі дослідницького характеру. Наприклад, учням

пропонується оцінити площу фігури, обмеженої графіком функції на відрізку, не використовуючи готових формул.

Спочатку вони розбивають відрізок на декілька частин і будують прямокутники однакової ширини, висота яких визначається значенням функції. Обчисливши суму площ цих прямокутників, учні отримують лише наближене значення. Проте зі збільшенням кількості розбиттів результат поступово уточнюється і наближається до певного числа. Саме така діяльність відображає ідею інтегральних сум і підводить учнів до розуміння інтеграла як границі, що підкреслюється у сучасних методичних дослідженнях [2, с. 45-46].

Подальше узагальнення здійснюється через метод неподільних. У цьому випадку фігура розглядається як сукупність нескінченно тонких смужок, а площа – як результат їх безперервного додавання. Повертаючись до розглянутого прикладу, учні переходять від роботи зі скінченними прямокутниками до уявлення про неперервний процес накопичення.

Таким чином, метод вичерпання формує уявлення про наближення, а метод неподільних – про неперервність, що разом створює основу для розуміння інтеграла.

Новизна даного дослідження полягає в тому, що ці історичні методи використовуються не як певна ілюстрація, а як повноцінний основний спосіб введення поняття інтеграла. Учні не отримують одразу готове означення, а поступово приходять до нього через власні спостереження та обчислення.

Додатково використання динамічної програми GeoGebra дозволяє візуально показати процес подрібнення цієї фігури. У результаті абстрактна ідея границі стає зрозумілою і наочною.

Наведемо для ілюстрації можливий алгоритм реалізації в середовищі GeoGebra:

1. Задати функцію: $f(x) = 0.25x^2 + 1$.
2. Створити точки на осі X: $A = (1, 0)$ та $B = (4, 0)$. Це дозволить учням вручну змінювати межі дослідження, перетягуючи точки. Задати межі, як змінні: $a = x(A)$, $b = x(B)$.
3. Створити повзунок n , що визначатиме кількість розбиттів: від 1 до 200 (крок 1).
4. Задати нижню суму (вписані прямокутники): $\text{LowerSum}(f, a, b, n)$. Це покаже площу, яка завжди менша за реальну.
5. Задати верхню суму (описані прямокутники): $\text{UpperSum}(f, a, b, n)$. Це покаже площу, яка завжди більша за реальну.

6. Переміщення повзунка дає можливість спостерігати зміщення прямокутників у бік співпадіння і те саме спостерігається для верхньої і нижньої суми. (рис. 1), (рис. 2)

Звертаємо увагу здобувачів освіти, що при великих значеннях n візуально прямокутники майже зливаються з кривою, а значення нижньої та верхньої сум починають співпадати у перших знаках після коми.

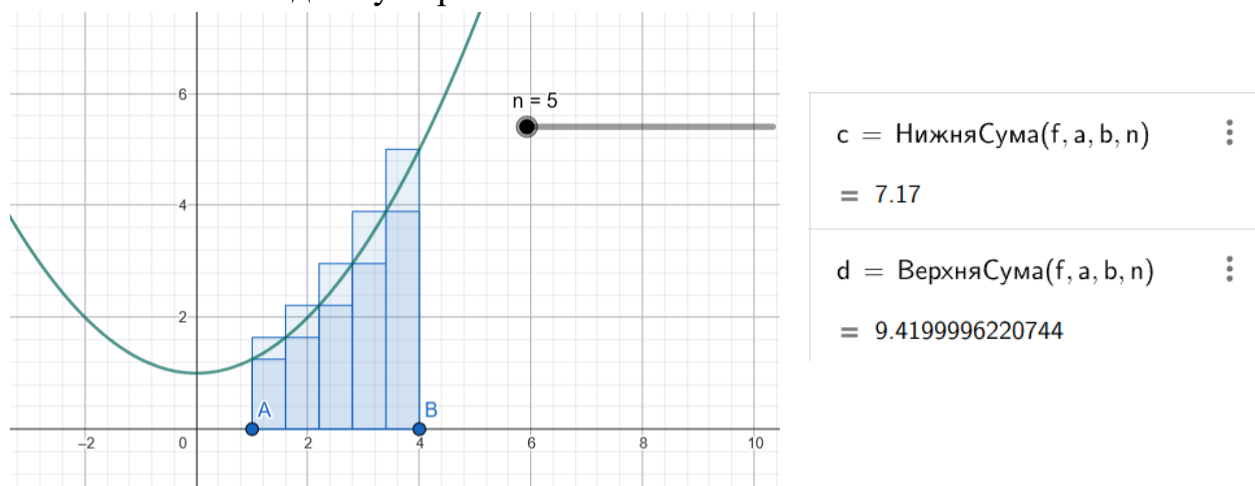


Рис. 1: «Верхня і нижня суми при $n=5$ »

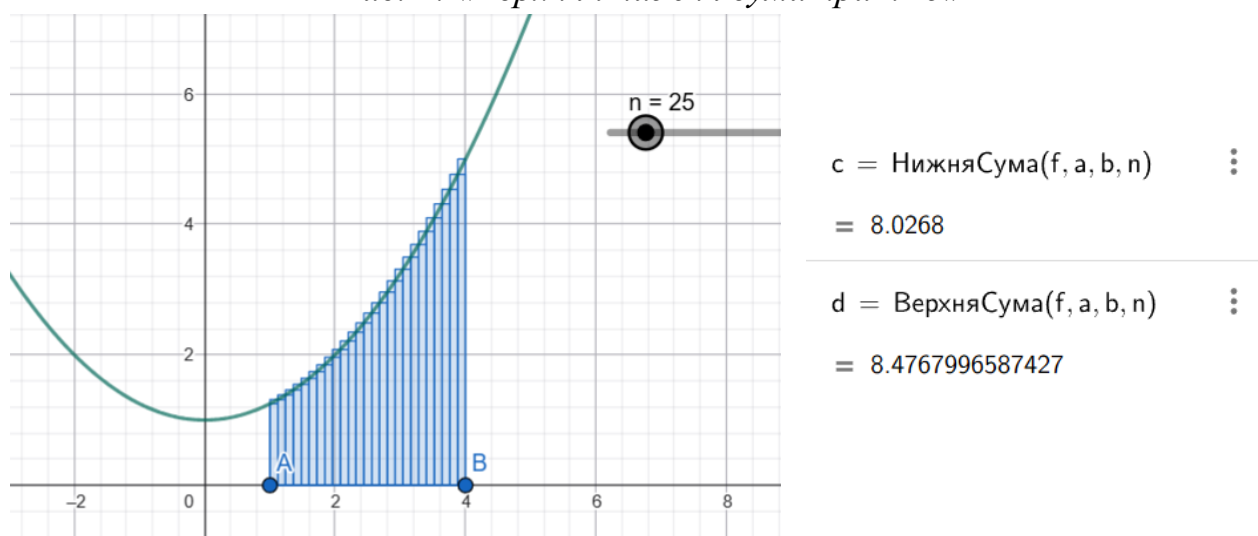


Рис. 2: «Верхня і нижня суми при $n=25$ »

Такий підхід змінює характер навчання: інтеграл сприймається не як формула, а як природний результат дослідження.

Підсумовуючи, можна підійти до висновку, що метод вичерпання і метод неподільних є найбільш ефективними засобами формування поняття інтеграла. Оскільки, вони забезпечують логічний і зрозумілий перехід від простих уявлень до складних математичних понять та сприяють глибшому розумінню матеріалу.

Список використаних джерел:

1. Бевз В. Г. Практикум з історії математики. Київ: НПУ ім. М. П.

- Драгоманова, 2004.
2. Ключник І. Г. Методичні підходи до вивчення невизначеного інтегралу // Педагогічні науки: теорія та практика. 2025. № 2. С. 44–49. DOI: <https://doi.org/10.26661/2786-5622-2025-2-06>

ЦИФРОВІ ФЛЕШ-КАРТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ЯК ІННОВАЦІЙНИЙ ІНСТРУМЕНТ СУЧАСНОГО ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ

Черкасов Р.В.

E-mail: roman.cherkasov@student.karazin.ua

Науковий керівник: Аршава О. О.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Сучасна середня освіта поступово зміщується від простого передавання знань до організації процесу їх довготривалого засвоєння. В навчанні математики це питання набуває особливої ваги, оскільки успішність здобувачів середньої освіти залежить не лише від розуміння матеріалу, а й від здатності швидко відтворювати базові знання: формули, означення, алгоритми та правила.

До основних типів флеш-карт відносяться:

1. текстові (запитання/поняття на одній стороні, відповідь/визначення – на іншій) – використовуються для термінів, дат, правил;
2. візуальні (зображення з одного боку, пояснення чи назва – з іншого) – добре працюють для мовного навчання, біології, мистецтва;
3. аудіо-карти (одна сторона містить слово чи фразу, інша – аудіозапис правильної вимови) – корисні для вивчення іноземних мов.

Одним із ефективних інструментів підтримки освітнього процесу є цифрові флеш-карти. Це невеликі навчальні картки, побудовані за принципом “питання–відповідь”, які стимулюють активне пригадування інформації. На відміну від пасивного перечитування, такий підхід змушує здобувачів самостійно відтворювати знання, що значно підсилює їх закріплення в пам’яті.

У педагогічній практиці флеш-карти також розглядаються як інструмент, який ефективно працює в умовах інтервального повторення [1,2]. Це означає, що матеріал повторюється через певні проміжки часу, що дозволяє уникнути швидкого забування та формує стійкі знання. Саме поєднання активного відтворення та повторення робить цей метод особливо ефективним у навчанні.

У математиці проблема забування матеріалу проявляється досить чітко. Здобувачі часто демонструють правильні результати одразу після пояснення та опанування теми, однак, через певний час виникають труднощі з застосуванням

навіть базових правил та формул. Флеш-карти дозволяють організувати короткі, але регулярні цикли повторення, що допомагає підтримувати знання в актуальному стані.

Використання флеш-технології на уроках математики дозволяє зробити навчання більш наочним, інтерактивним і мотивуючим. Флеш-карти допомагають здобувачам не лише зрозуміти абстрактні поняття, а й активізують увагу та сприяють індивідуалізації навчання.

Наведемо приклади такого застосування:

1. інтерактивні задачі: здобувачі змінюють параметри рівняння й одразу бачать, як змінюється його графік;
2. геометричні побудови: флеш-анімації показують крок за кроком побудову трикутника чи кола;
3. віртуальні лабораторії: моделювання статистичних процесів або комбінаторних задач;
4. тренажери: автоматичне повторення прикладів із миттєвим зворотним зв'язком.

Важливою перевагою є використання цифрових платформ для створення флеш-карт. Такі сервіси, як Anki або Quizlet, автоматизують процес повторення, підлаштовуючи його під рівень засвоєння матеріалу конкретним здобувачем. Це робить навчання більш індивідуалізованим і дозволяє оптимізувати час повторення.

Дослідження в галузі педагогічної психології підтверджують ефективність такого підходу. Зокрема, активне пригадування інформації та повторення через певні інтервали часу сприяють значно кращому довготривалому запам'ятовуванню порівняно з традиційними методами навчання. Це пояснює зростаючий інтерес до використання флеш-карт у сучасній освіті.

Окремо варто зазначити, що флеш-карти є універсальним інструментом, який використовується в різних предметних галузях. У педагогічних дослідженнях вони ефективно застосовуються у вивченні мов, природничих дисциплін та інших сфер, де важливим є засвоєння великого обсягу інформації. Це підтверджує їх методичну гнучкість та можливість адаптації до математики.

Таким чином, цифрові флеш-карти можна розглядати як ефективний інструмент сучасного освітнього процесу, що поєднує когнітивні механізми пам'яті та можливості цифрових технологій. Їх використання на уроках математики сприяє підвищенню якості засвоєння знань, формуванню глибшого розуміння через практичну взаємодію, розвитку критичного мислення та самостійності здобувачів, формуванню стійкої навчальної мотивації та можливості поєднати теорію й практику в реальному часі.

Список використаних джерел:

1. Абсалямова Я. В., Гурська О. О., Теремінко Л. Г. Використання онлайн-тестів і флеш-карт для розширення словникового запасу студентів з англійської мови // Педагогічна Академія: наукові записки. 2025. URL: <https://zenodo.org/records/18209046> (дата звернення: 10.04.2026).
2. Kasáková M., Šedivá J. Mind mapping as efficient tools in mathematics education // *Communications – Scientific Letters of the University of Žilina*. 2014. URL: https://komunikacie.uniza.sk/artkey/csl-201403-0015_mind-mapping-as-efficient-tools-in-mathematics-education.php (дата звернення: 10.04.2026).

Науково-популярна

Popular Science

ABOUT THE ANDRÉIEF IDENTITY

Chebitko I.I.

E-mail: iryna.chebitko@student.karazin.ua

Academic advisor: Ignatovich S. Yu.

V. N. Karazin Kharkiv National University

About Kostiantyn Oleksiiovych Andreiev [4]

Kostiantyn Oleksiiovych Andreiev was born on 14(26) March 1848 into a family of fur traders; his childhood was marked by financial hardship and a serious eye injury that left him partially sighted. He did not attend regular school until age twelve but advanced rapidly through self-study and began tutoring others by age fourteen.

In 1873, after completing a master's-level graduate course, Andreiev was invited to Kharkiv University (now V. N. Karazin Kharkiv National University). Upon his arrival, he defended a habilitation thesis in December 1873 and officially began teaching as a privatdocent in January 1874. In February 1875, he successfully defended his thesis, *On a geometric formation of planar curves*, earning a promotion to a full-time lecturer.

At the end of 1876, Andreiev was sent to Western Europe for a year and a half of practical study. Spending the majority of his time in Berlin and Paris, he developed his doctoral thesis, which focused on the application of geometric correspondences to the construction of curves. Returning from abroad in February 1879, he successfully defended this work. This success led to his appointment as an extraordinary professor at Kharkiv University in the same year. Also in 1879, he played a key role in establishing the Kharkiv Mathematical Society, serving as its first president.

By 1884, he had become an ordinary professor at Kharkiv University and subsequently took on an additional professorship at the newly founded Kharkiv Technological Institute in 1885.

The Andréief identity

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval and let $f_1, \dots, f_N$ and $\phi_1, \dots, \phi_N$ be integrable functions supported on I . Then:

$$\int_I dx_1 \dots \int_I dx_N \det [f_j(x_k)]_{j,k=1}^N \det [\phi_j(x_k)]_{j,k=1}^N = N! \det \left[\int_I f_j(x) \phi_k(x) dx \right]_{j,k=1}^N \quad (1)$$

This is known in modern literature as the Andréief identity, the continuous Cauchy-Binet formula, and sometimes the Andréief-Heine identity, the Cauchy-Binet-Andréief formula, the Andréieff-Heine-Szegö formula, “Gram’s” theorem [7].

Relation to the Cauchy-Binet formula

The Cauchy-Binet formula [6] for matrices A of size $m \times n$ and B of size $n \times m$ (with $m \leq n$) states:

$$\det (AB) = \sum_{S \in \binom{[n]}{m}} \det (A_{[m],S}) \det (B_{S,[m]}), \quad (2)$$

where $A_{[m],S}$ is the submatrix of A with columns indexed by S , and $B_{S,[m]}$ is the submatrix of B with rows indexed by S .

Equation (1) can be derived from (2) by discretizing the integral kernel with delta-type functions (limits of sums over discrete points t_l), and conversely one can interpret Cauchy–Binet as a discrete limit of Andreev’s identity.

The Original Publications (1882–1883)

Andreev first developed and published his findings in the *Communications of the Kharkiv Mathematical Society*.

The paper [1] issued in 1882 establishes the foundational 2×2 identity, which was used to provide a unified proof for integral inequalities proposed by P. L. Chebyshev and V. G. Imshenetsky. Building upon this work, his 1883 publication [2] presented the full multidimensional generalization of the identity utilised in the earlier paper.

The French Translation

To reach the Western European mathematical establishment, the 1883 generalization was translated into French under the title “*Note sur une relation entre les intégrales définies des produits des fonctions*”, authored under the French transliteration “C. Andréief”. The author of the work [7] investigated the issue regarding the different spellings of Andreev’s surname and even found a link to the website of the Kharkiv Mathematical Society, where the original paper is available.

At the very end of this French manuscript [5], Andreev appended a sign-off denoting when and where he finished the text: “*Kharkof, le 10 décembre 1883*”.

Because of this specific 1883 dateline at the bottom of the text, generations of mathematicians and canonical textbooks erroneously assumed that 1883 was the year

the journal itself was published. However, historical archives confirm that the specific journal issue containing this paper—*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, Series 3, Volume 2—was not actually printed and released until 1886.

All the publications are mentioned in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (issues 15 [8] and 18 [9]).

Applications

The Andréief identity is a key concept in random matrix theory and is a powerful tool for performing exact computations with finite N in unitary invariant ensembles. It is discussed in detail in Chapter 11 ('Meet Andréief') of the book [10]. In this chapter, the identity is utilised to evaluate complex multiple integrals, such as partition functions and finite- N probabilities, with applications including the calculation of the exact probability of a matrix having a specific number of positive eigenvalues.

The profound impact of the Andréief identity is perfectly illustrated by its increasing relevance in contemporary research. Despite originating in the late 19th century, the upward trend in academic citations of his 1886 French publication [5] continues to this day.

According to [3], over 41 citations of the paper have been recorded since 2020 alone. This modern surge in engagement covers many advanced fields, especially probability theory, linear and multilinear algebra, statistical mechanics and quantum theory. This ongoing and growing reliance on his work proves the fundamental importance of Andreiev's century-old formulations, which are crucial to solving today's complex mathematical problems.

References:

1. Andreev K. A. A few words regarding the theorems of P. L. Chebyshev and V. G. Imshenetsky on definite integrals of the product of functions. Communications of the Kharkiv Mathematical Society. 1882. No. 2. P. 110–123. URL:
2. https://kms.univer.kharkov.ua/pdf/1879_1883/1882_2/1882_2_3_Andreev.pdf (accessed: 13.04.2026).
3. Andreev K. A. Some generalizations on the question of the expansion of a definite integral according to the formula proposed by P. L. Chebyshev. Communications of the Kharkiv Mathematical Society. 1883. No. 1. URL: https://kms.univer.kharkov.ua/pdf/1879_1883/1883_1/1883_1_2_Andreev.pdf (accessed: 13.04.2026).
4. Andreev Konstantin Alekseevich. Author Profile. zbMATH Open. URL: <https://zbmath.org/authors/andrejev.k-a> (accessed: 13.04.2026)
5. Andreev Konstantin Alekseevich. MacTutor History of Mathematics Archive. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Andreev/> (accessed:

- 13.04.2026).
6. Andréief C. Note sur une relation entre les intégrales définies des produits des fonctions. Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 1886. Ser. 3, Vol. 2. P. 1–14.
 7. Cauchy–Binet formula. Wikipedia. URL:
 8. https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Binet_formula (accessed: 13.04.2026).
 9. Forrester P. J. Meet Andréief, Bordeaux 1886, and Andreev, Kharkov 1882–83. arXiv:1806.10411 [math-ph]. 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1806.10411> (accessed: 13.04.2026).
 10. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Vol. 15 (1883). Berlin, 1886. URL: <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb11652144?page=286,287&q=%28Andreieff+%29> (accessed: 13.04.2026).
 11. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Vol. 18 (1886). Berlin, 1889. URL: <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb11652147?page=332,333&q=Andr%C3%A9ief> (accessed: 13.04.2026).
 12. Livan G., Novaes M., Vivo P. Introduction to Random Matrices: Theory and Practice. Springer Briefs in Mathematical Physics. Vol. 26. Springer, 2018. arXiv:1712.07903 [math-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/1712.07903> (accessed: 13.04.2026).

«ШЛЯХЕТНА КАСТА» ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ – ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Кубайчук О.О.

E-mail: o.kubaychuk@gmail.com

Клименко М.А.

E-mail: margoklimenko11@gmail.com

Науковий керівник: Кубайчук О.О.

*Національний технічний університет України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського"*

Одним з найвидатніших винаходів людства ХХ ст. вважається винахід засобів перетворення інформації – комп’ютерів, основоположну роль у створенні яких відігравали вчені-математики, яким світ завдячує не лише першим формулюванням та дослідженням абстрактних моделей, а й практичною реалізацією електронної обчислювальної машини, подальшим розвитком фундаментальних та прикладних математичних досліджень в усіх напрямках комп’ютерної галузі з відкриттям та виділенням дискретної (комп’ютерної)

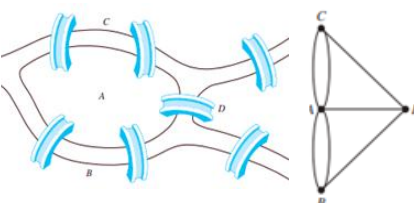
математики в окремий розділ сучасної математики з вивчення властивостей математичних об'єктів дискретного характеру. Дискретна математика формує логіку, послідовність, аналітичні та інтелектуальні мислення, навички та вміння, без яких не можливим є засвоєння, формування знань та їх подальша практична реалізація в будь-якій галузі / сфері життєдіяльності.

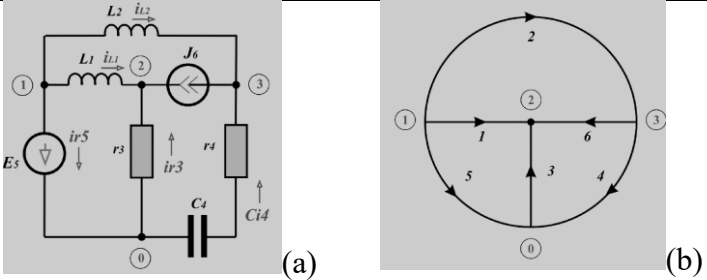
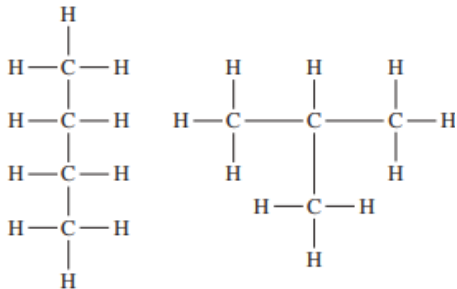
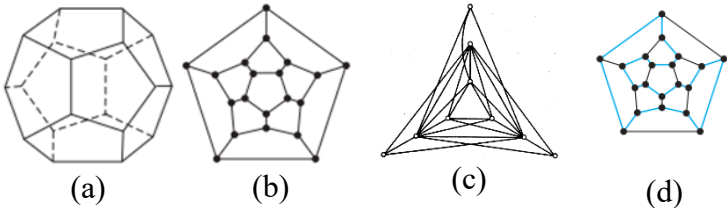
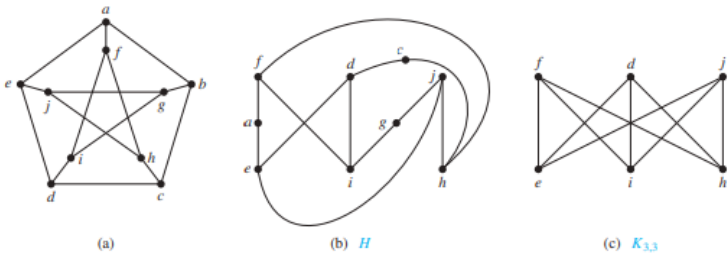
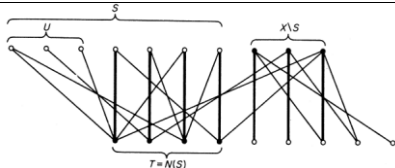
Історичні витоки системи логічних міркувань пов'язані з давньогрецьким філософом Аристотелем (384–322 рр. до н. е.), який першим започаткував та виділив «логіку» під назвою «аналітика» як окрему систематизовану науку про мислення (про розумову діяльність людини), його основні закони як інструмент пізнання для будь-якої науки і де "аналіз" – це розкладання складного на просте аж до далі нерозкладних першоначал (аксіом) [1]. Як логік Аристотель також обґрунтував, що є істина а що хиба, а його «логіка» до XIX - XX ст.ст. вважалася наукою повною мірою закінченою і досконалою, допоки в середині XIX ст. англійський математик Джордж Буль застосуванням математичних методів не наблизив «логіку» до математики, чим заклав основи математичної логіки [2].

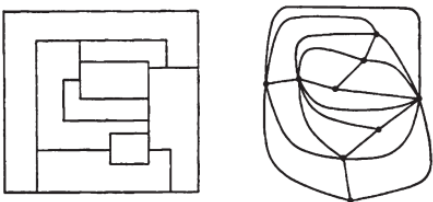
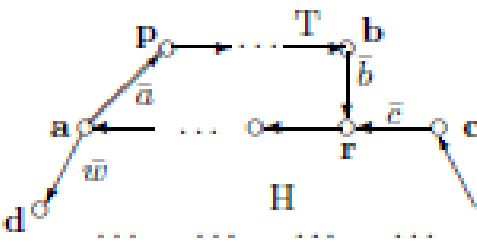
На сьогодні інтерпретація поняття «знання» в контексті логіки наукового дослідження знаходить найбільш повне відображення завдяки графам, оскільки саме теорія графів вважається одним із найкращих інструментів дослідження структури об'єктів і відношень між ними [3, 4]. В загальному спрощеному випадку, графи – це дискретні структури, що моделюють набір зав'язків, складаються з вершин і ребер (дуг), які з'єднують ці вершини [5].

Тезисне відображення основних історичних відомостей щодо розвитку теорії графів узагальнено наведено у таблиці 1.1.

Таблиця 1: Деякі основні аспекти історії розвитку теорії графів

Рік	Вчений та його внесок в розвиток теорії графів	Ілюстративний матеріал з відповідних джерел
1736	Леонард Ейлер швейцарський математик, розв'язав відому задачу Кенігсберзьких мостів	 Сім мостів Кенігсберга та багатографова модель [6, стор.172]
1847	Густав Кірхгоф німецький фізик, фактично розробив теорію дерев при розв'язку системи рівнянь для знаходження сили струму в контурі електричного кола	

		 Схема розрахунку електричного кола за правилом Кірхгофа (а) та графа (b) до нього [7, стор.71]
1857	Артур Кейлі, англійський математик, перша робота з застосування теорії графів у хімії, вивів формулу кількості неорієнтованих дерев, яка розв'язувала задачу про можливі структури насичених вуглеводнів (C_nH_{2n+2})	 Два дерева ізомерів для бутану (C_4H_{10}) [5, стор. 786]
1859	Вільям Гамільтон, ірландський математик, гра "Навколосвітня подорож"	 Пазл Гамільтона «Навколосвітня подорож»: додекаедр (а), його граф (b, c) та рішення головоломки (d) [5, стор.734]
1891	Юліус Петер Христіан Петерсен, данський математик, праці щодо методів і теорії розв'язання задач геометричної побудови та теорії регулярних графів, які стали фундаментальним внеском в сучасну теорію графів	 Граф Петерсена (а) [8, стор.55], підграф Н (b), гомеоморфний до $K_{3,3}$, та $K_{3,3}$ (c) [5, стор.760]
1936	Денеш Кьоніг, угорський математик, вперше представив теорію графів як окрему математичну дисципліну, ввів термін «граф»	 Приклад дводольного графа з дводольним розбиттям (X, Y) [8, стор.4]

1939	Курт Цадек Левін , психолог, розробив пленарну карту “життєвого простору” індивідуума та її граф		Пленарна карта Левіна та її граф [9, стор.6]
1954	П. Менцерат , німецький вчений, моделювання будови слів за допомогою мереж-орієнтованих графів - графа з гранями, орієнтованими за напрямком розгортання вихідної (мінімальної) структури слова		Приклад орієнтовного графу символічної моделі морфемної будови українських слів [10, стор.45]
2007	Абрам Трахтман , ізраїльський математик, вирішив задачу розфарбування доріг (теорема розфарбування доріг)		Схема вирішення задачі розфарбування доріг [11, стор.6]

Теорія графів має широке практичне використання: від фізики і хімії до географії; відмінно реалізується в інформатиці та комп'ютерних науках за рахунок розвитку штучного інтелекту, маршрутизації та кібербезпеки, що надважливо через постійні зміни воєнної політики на зовнішній світовій арені та загальну популярність комп'ютерної мережі, а отже значно підвищує рівень небезпеки для конфіденційності користувачів; надає можливість аналізувати, моделювати та оптимізувати складні структури та зв'язки у вигляді вершин і ребер для абстрагування різних типів даних та детального вивчення зв'язків між ними, реконструювання та створення моделей та зв'язків (наприклад моделювання молекул, кристалічних решіток) або знаходження найкоротшого шляху/циклів (створення когнітивних карт, схематизація маршрутів перевезення).

Означення теорії графів дозволяють сформулювати та вирішити багато задач – від розвитку логічного послідовного спрямованого мислення в дітей с формування вмінь і навичок вирішення найпростіших логічних завдань у вигляді гри, до побудови надскладних комунікаційних мереж, зокрема в програмуванні, генетиці, логістиці тощо.

Список використаних джерел:

1. Мошенський, О.С. Логічне вчення Аристотеля. XXIII Харківські міжнародні Сковородинівські читання «Античні витоки європейської

- раціональності. (м. Харків, 23-24 вересня 2016 року), 252- 257. URL: <https://dspace.univd.edu.ua/server/api/core/bitstreams/c13aa8ad-b02d-41e8-84d1-e4e270bb6bd7/content> (дата звернення: 08.04.2026).
2. Трохимчук, Р.М., & Нікітченко, М.С. Дискретна математика у прикладах і задачах: навч. посібник. Київ: «Київський університет», 2017. 248 с.
 3. Грабовський, В. А. Методи пошуку у системах штучного інтелекту: метод. рекомендації. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2018. 62 с.
 4. Кирисюк, А. А. Методологія конструювання лексико-семантичних графів за допомогою комп'ютерної програми GERPI. *Вісник КНЛУ. Серія Філологія*, 2022. 25 (1), 57-69.
 5. Kenneth H. Rosen. Discrete mathematics and its applications, eighth edition (8th ed.). NY: McGraw-Hill, 2019. 942 p.
 6. Кучинська, Н.В., Матійко, А.А., Шолохов, С.М. Дискретна математика: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 280 с. URL: <https://ela.kpi.ua/items/74f47383-5946-4587-bcd3-4cc0b88193fb> (дата звернення: 08.04.2026).
 7. Скіцько, І.Ф., & Скіцько, О.І. Фізика (Фізика для інженерів): Підручник. Київ: НТУУ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 513 с.
 8. Bondy, J.A., & Murty, V.S.R. Graph theory with applications (Fifth Printing, 1982). New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1976. 264 p. URL: <https://www.zib.de/userpage/groetschel/teaching/WS1314/BondyMurtyGTWA.pdf> (дата звернення: 10.04.2026).
 9. Harary, F. Graph Theory. CRC Press Taylor & Francis Group, 2018. 273 p.
 10. Карпіловська, Є.А. Вступ до прикладної лінгвістики: комп'ютерна лінгвістика: підруч. Донецьк: ТОВ «Юго-Восток, Лтд», 2006. 188 с.
 11. Trahtman, A.N. The road coloring problem. *Isr. J. Math.* 2007. 172, 51–60. URL: <https://doi.org/10.1007/s11856-009-0062-5> (дата звернення: 10.04.2026).

Мала наукова конференція

Junior Scientific Conference

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДОРОЖНІХ СИТУАЦІЙ, ЩО ПЕРЕДБАЧАЮТЬ РОЗГАЛУЖЕННЯ ТА ЗАТОРИ

Бреєв І.С.

E-mail: breevivan34@gmail.com

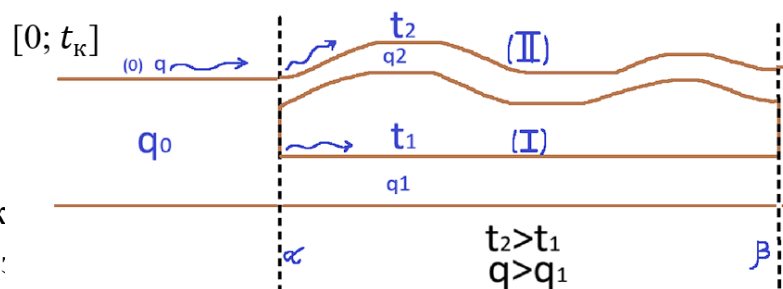
Наукові керівники: Гончарук А.Б., Коломойцева О.І.

Комунальний заклад «Харківський науковий ліцей “Обдарованість”»

Харківської обласної ради Харківської області

В цій роботі розглядається проблема оптимального керування транспортним потоком у години пік. Метою є визначення такого алгоритму розподілу транспортного потоку, за якого загальний час проїзду всіх автомобілів є мінімальним, навіть якщо для окремих машин час руху може не бути найменш можливим. Такий підхід дозволяє швидше зменшити транспортне навантаження на критичних ділянках дорожньої мережі.

Розглядається така модельна ситуація. По дорозі рухається основний потік машин, що прямує у деяке місто. На дорозі виникає затор, тому що дорога стає вузкою, але є обхідний шлях, хоча він і довший, який може дозволити нам розвантажити основну дорогу (Рис. 1).



Для знаходж
модель утворення :

аналітичний алгоритм розподілу потоку, який ґрунтується на системі лінійних рівнянь. Розв'язок системи рівнянь дає моменти закриття відповідних доріг та мінімальний можливий час проїзду всього потоку машин до пункту призначення. Знайдено алгоритм порівняно з природним алгоритмом проїзду водіїв. Графічне порівняння показало, що зі збільшенням інтенсивності руху потреба у зовнішньому керуванні автомобільним потоком зростає.

Запропонований алгоритм узагальнено для конфігурацій дорожніх мереж, що передбачають розгалуження на довільну кількість доріг, а також, у межах

описаних обмежень, пов'язаних із конфігурацією систем доріг, алгоритм узагальнено для складніших систем шляхів, що перетинаються.

Список використаних джерел:

1. Braess D. On a paradox of traffic planning [Electronic resource]. URL: <https://homepage.rub.de/Dietrich.Braess/Paradox-BNW.pdf> (дата звернення 19.04.2026).
2. Кашканов А.А., Кужель В.П. Організація дорожнього руху. – Вінниця : ВНТУ, 2017. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/IRVC/2021/Kashkanov_2017_125.pdf (дата звернення 19.04.2026).